Halvsyntaktiske modeller og unormale setningslogiske modalsystemer

Morten Rognes

1971

(Bearbeidet og renskrevet høsten 2008)

§1 Innledning

Dette arbeidet er en videreføring av Rognes [1] og Rognes [2]. I Rognes [1] innførte vi begrepet halvsyntaktisk modell og viste hvordan det kunne anvendes ved de klassiske modalsystemene T,B,S4 og S5. I Rognes[2] gjorde vi et forsøk på å anvende begrepet ved analysen av noen deontiske logikker. I dette arbeidet skal vi anvende halvsyntaktiske modeller i forbindelse med de modalsystemene som studeres i Kripke [2] og endel beslektede kalkyler. Disse kalles av og til for "unormale" systemer fordi slutningsregelen |- α → |-Lα ikke kan kan utledes i dem.

Systemene det dreier seg om er for det første systemene E2 og E3. Dessuten dreier det seg om systemene S2 og S3, og de to systemene man får nå man legger aksiomskjemaet MMα til henholdsvis S2 og S3 gitt at man aksiomatiserer disse systemene på den måten som det gjøres her. De systemene som fremkommer som resultat betegnes med S6 og S7. Vi behandler også systemet S8, som er S3 utvidet med aksiomskjemaet LMMα. I tillegg til disse systemene studerer vi kalkylene S3.5 og S9, samt endel sekvenser av systemer som det er naturlig å betrakte i sammenheng med E2, E3 og S2. Det vi hovedsakelig gjør i dette arbeidet kan sammenfattes slik:

For hvert av de system S, blandt dem vi har nevnt, avgrenser vi en klasse av halvsyntaktiske modeller |S|. Vi viser så at ethvert teorem i S er gyldig i alle S-modeller og omvendt. Dette innebærer at vi viser at systemet S er gyldig og fullstendig med hensyn på den korresponderende modellklasse |S|. Dernest viser vi for hvert system S hvordan vi, gitt en S-modell M, kan konstruere en Kripke S-modell, M*, som verifiserer nøyaktig de samme formlene som M. Fra dette følger at enhver formel som er gyldig i alle Kripke S-modeller også er gyldig i alle S-modeller. Vi viser også det omvendte, nemlig hvordan man, gitt en Kripke S-modell, kan konstruere en S-modell som verifiserer nøyaktig de samme formlene. Fra dette følger at enhver formel som er gyldig i alle S-modeller også er gyldig i alle Kripke S-modeller. Sammen med kompletthets- og gyldighetsresultatene for S, med hensyn på S-modeller, kan man fra dette utlede tilsvarende resultater når det gjelder Kripke S-modeller.

La oss gi en oversikt over innholdet. I §2 - §4 gjør vi rede for de grunnleggende begrepene vi trenger. §1 gis en beskrivelse av den type setningslogiske språk vi arbeider med. Vi formulerer her det systemet for setningslogikk som er inkludert i alle de modallogiske systemene vi undersøker, og avgrenser syntaktisk mengden av alle de rent setningslogiske formler som er gyldige i språket L. I §3 innfører vi begrepet halvsyntaktisk modell. Begrepet defineres presist og vi viser at alle de setningslogisk gyldige formlene holder i enhver halvsyntaktisk modell. I §3.1 presenteres en alternativ, men ekvivalent, definisjon av dette modellbegrepet.

En vesentlig del av dette arbeidet består i å bevise forskjellige fullstendighetsresultater for de kalkylene vi undersøker. I §4 gjør vi rede for hva som menes med at en formelmengde Δ er *konsistent* og *maksimalt konsistent* med hensyn på et system S av den type vi arbeider med her. I tillegg formulerer vi Lindenbaums sats som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en S-maksimalt konsistent mengde. Dessuten formulerer vi en ganske omfangsrik sats om S-maksimalt konsistente mengder. Disse satser brukes i alle de fullstendighetsbevisene vi gir. Det bør nevnes at §2 - §4 er nesten ordrett identiske med de tilsvarende avsnitt i
Rognes [1].

I §5 definerer vi aksiomatiseringene av alle de modalsystemene vi undersøker. Det dreier seg om systemene E2, E3, S2, S3, S6-S8, pluss tre sekvenser av systemer, nemlig <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>/nêN/. Det bør nevnes at nesten alle disse aksiomatiseringene er hentet fra Kripke [2] og at det som karakteriserer dem er at hvert system bare har en slutningsregel, nemlig modus ponens. I §6 avgrenser vi presist de klasser av halvsyntaktiske modeller som svarer til modalsystemene modalsystemene vi nå har nevnt. Vi viser at alle teoremene i hvert system er gyldige i alle modeller i den korresponderende modellklasse. I §7 viser vi så at alle disse systemene er komplette med hensyn på sine respektive modellklasser. I §8 definerer vi de klasser av Kripke-modeller som svarer til de forskjellige systemene. I §9 undersøker vi sammenhengen mellom de halvsyntaktiske modellene og Kripke-modellene og beviser de resultatene vi nevnte ovenfor.

I §10 beviser vi tilsvarende resultater for systemene S3.5 og S9. Disse systemene behandles separat. Endelig gir vi i den siste paragrafen bevis for en rekke snitt-resultater vedrørende kalkylene. Vi viser for eksempel at S3 er snittet av S4 og S8 og at S3.5 er snittet av S5 og S9. I et tillegg har vi tillatt oss å ta med et diagram som viser inklusjonsforholdene mellom alle de modalsystemene vi har undersøkt. Dette inkluderer også dem som ble studert i Rognes [1] og Rognes [2].

§2 Grunnleggende syntaktiske begreper

Vi tar vårt utgangspunkt i et enkelt setningslogisk språk L hvor de primitive symbolene er: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,..... , videre (ii) de setningslogiske konnektivene → og ¬, som står for henholdsvis materiell implikasjon og negasjon, samt (iii) den monadiske modaloperatoren L. I tillegg til disse uttrykkene inngår de vanlige parantestegnene i L

De velformede formlene i L, vi betegner mengden av velformede formler med Fm(L), er avgrenset ved de følgende regler: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel. (b) Er α og β velformede formler så er også (¬α), (α→ β) og Lα velformede formler. (c) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (a) og (b) er velformede formler.

Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene, disjunksjon, konjunksjon og bikondisjonal, samt mulighetsoperatoren M, defineres disse på følgende vis:

Definisjon 2.1

$\alpha \text{ v } \beta = (\neg\alpha) \to \beta$

$\alpha \,\&\, \beta = \neg(\alpha \to (\neg\beta))$

$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \to \beta) \,\&\, (\beta \to \alpha)$

$M\alpha = \neg L \neg\alpha$

Med et setningslogisk aksiom i L forstår vi enhver formel som er en instans av ett av de følgende skjemaer:

(S1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(S2) $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta)$

(S3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

I de logikkene vi skal betrakte er det bare én slutningsregel, nemlig modus ponens. Som bekjent er dette:

MP $\quad \vdash \alpha \;\&\; \vdash(\alpha\rightarrow\beta) \quad \rightarrow \quad \vdash \beta$

Med mengden av setningslogisk gyldige formler i L forstår vi den minste mengden av formler i L som inneholder alle instanser av skjemaene S1 - S3 og som er lukket under modus ponens. Vi sier at formelen α er bevisbar i setningslogikken, i symboler "PC|- α" hvis og bare hvis α er den siste formelen i en rekke av formler der hver formel enten er en instans av et av skjemaene S1 - S3 eller er sluttet fra to foregående formler i rekken ved hjelp av modus ponens. Man innser lett at α en setningslogisk gyldig formel hvis og bare hvis den er bevisbar i setningslogikken.

§3 Modellteori for setningslogiske systemer i L. Halvsyntaktiske modeller

Med en sannhetsmengde, Δ, i L forstår vi en formelmengde Δ som oppfyller de følgende krav:
(i) For enhver setningsbokstav p i L har man enten at p eller $\neg p$ er med i Δ. (ii) Er α en vilkårlig formel i L har man at $(\neg\alpha)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis det ikke er slik at α er med i Δ.
(iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man at $(\alpha\rightarrow\beta)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis man har at dersom α er med i Δ så er β det også.

Vi skal nå definere hva vi forstår med en halvsyntaktisk modell for L. Vi formulerer denne definisjonen formelt slik:

Definisjon 3.1 Med en *halvsyntaktisk* modell M forstås et ordnet par $<\Delta,R>$ som oppfyller de følgende krav:
(i) Δ er en sannhetsmengde
(ii) R er en, muligens tom, mengde med formler i L
(iii) $(A\alpha)(\alpha\hat{e}Fm(L) \rightarrow (L\alpha)\hat{e}\Delta \leftrightarrow \alpha\hat{e}R)$

I det følgende skal vi kalle det som her har blitt omtalt som halvsyntaktiske modeller for modeller[1]. En formel α sies å være PC- gyldig dersom vi har for enhver halvsyntaktisk modell
$M=<\Delta,R>$ at $\alpha\hat{e}\Delta$. Vi betegner klassen av halvsyntaktiske modeller med |PC|. Hvis en formel er α holder i enhver modell som er med i |PC|, det vi si er PC-gyldig, skriver vi "$|PC| \models \alpha$"

Før vi går videre innfører vi projeksjonsfunksjonen π på ordnete par ved de følgende stipulasjoner: Er $a= <x,y>$ setter vi $\pi;1(a) = x$ og $\pi;2(a) =y$. Det er med andre ord slik at dersom a er et ordnet par betegner $\pi;1(a)$ den første komponenten i paret og $\pi;2(a)$ den andre komponenten i paret. Trivielt har vi da at $a= <\pi;1(a), \pi;2(a)>$ om a er et par.

Det er ganske lett å se at alle setningslogisk gyldige formler i L er gyldige i den betydning som er angitt her. Vi skal gi et detaljert bevis nedenfor selvom det er svært enkelt. Det er med andre ord slik at dersom α er en setningslogisk gyldig formel så har man at $\alpha\hat{e}\Delta$ for enhver halvsyntaktisk modell $<\Delta,R>$. Legger man forskjellige krav på de halvsyntaktiske modellene vil det naturigvis være flere formler i L som blir gyldige enn bare de setningslogiske teoremene i L.

Teorem 3.2 Er α en vilkårlig formel i L gjelder:
(a) $PC\vdash \alpha \quad\rightarrow\quad |PC| \models \alpha$
(b) $|PC| \models \alpha \quad\leftrightarrow\quad PC \vdash \alpha$

---

[1] Ganske enkelt fordi ordet uttrykket "modell" er kortere en "halvsyntaktisk modell". Når ordet "modell" brukes i det følgende skulle det uansett gå klart frem fra sammenhengen at det må dreie seg om den typen strukturer som er avgrenset ved Definisjon 3.1.

Bevis for (a): Vi skal gi bevis for gyldighetsdelen i denne satsen her. For det første må vi vise at alle instanser av de setningslogiske aksiomskjemaene S1 - S3 er PC-gyldige. Når det gjelder disse skjemaene vil det derfor være nok å vise at de alle holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(a) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Vi har åpenbart αêΔ → (βêΔ → αêΔ). Fra dette følger, siden Δ er en sannhetsmengde αêΔ → (β→α)êΔ. Herav har vi så, igjen fordi Δ er en sannhetsmengde at (α→(β→α))êΔ. Dette viser at S1 holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(b) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Det skulle være klart at vi på basis av ren setningslogikk har at
(1) (¬(βêΔ) → ¬(αêΔ)) → (αêΔ → βêΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde har vi
(2) (α→β)êΔ ↔ (αêΔ → βêΔ) og (3) (Aα)(αêFm(L) → (¬(αêΔ) ↔ (¬α)êΔ)). Fra (1) - (3) kan man slutte: (4) ((¬β)êΔ → (¬α)êΔ) →(α→β)êΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav: ((¬β) →(¬α))êΔ → (α→β)êΔ. Herav følger i sin tur, når man tar hensyn til kravet (iii) i definisjon av sannhetsmengde, at S2êΔ. Det følger at S2 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(c) Anta M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell og at α,β,γ er vilkårlige formler i L. Da har vi åpenbart (αêΔ → (βêΔ → γêΔ)) →((αêΔ → βêΔ)→ (αêΔ → γêΔ)). Ved å anvende kravet (iii) i definisjonen av sannhetsmengde ser man at vi har:

(α →(β→γ))êΔ → ((α→β)êΔ → (α→ γ)êΔ) og derfor

(α →(β→γ))êΔ → ((α→β) →(α→γ))êΔ. Herav følger så i sin tur, igjen ved hjelp av kravet (iii) i definisjonen vi ga av sannhetsmengde, at S3êΔ. Siden modellen M og formlene α,β,γ var vilkårlig valgt, viser dette at enhver instans av S3 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(d) Anta C er en delmengde av de halvsyntaktiske modellene. Vi skal vise at dersom α og α→β holder i alle modeller i C så gjør β det også, med andre ord skal vi vise at modus ponens bevarer C-gyldighet. Dette impliserer umiddelbart at dersom α og α→β holder i alle S0.5-modeller vil også β gjøre det. Anta α og α→β holder i enhver modell i mengden C. Dette innebærer at

(1) (AM)(MêC → αêπ;1(M)) og
(2) (AM)(MêC → (α→β)êπ;1(M))

Anta M= <Δ,R> er en vilkårlig i C. Da har vi fra (1) og (2) at αêΔ & (α→β)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra det at (α→β)êΔ at vi har αêΔ → βêΔ. Fra dette og det at αêΔ følger βêΔ. Siden M var et vilkårlig element i C har vi altså bevist: (AM)(MêC → αêπ;1(M)), med andre ord at også β holder i alle modeller i C.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for det første punktet i Teorem 3.1. QED.

§3.1 En alternativ definisjon av de halvsyntaktiske modellene

Det er mulig å formulere den semantiske teorien vi har presentert ovenfor på en litt annen måte. Med en verditilordning for L forstår vi en funksjon υ som tilordner enhver setningsvariabel enten tallet 1 eller 0. naturligvis er det meningen at tallet 1 representerer sannhetsverdien 1 og 0 sannhetsverdien usann. Med en halvsyntaktisk modellstruktur forstår vi så et ordnet par <υ,R> der υ er en verditilordning for L og R en en delmengde av mengen av formler i L, Fm(L). Er m=<υ,R> en slik modellstruktur kan vi definere hva som menes med at en formel α i L er sann i modellstrukturen m. Vi bruker "<υ,R> ⊨ α" som forkortelse for "α er sann i modellstrukturen <υ,R>". Uttrykket er definert induktivt på lengden av formler i L på følgende måte:

Definisjon 3.1.1 Anta L er et setningslogisk språk for modallogikk og at <υ,R> er en modellstruktur for L. Da setter vi om αêFm(L):
(i) <υ,R> ⊨ α ↔ υ(p) = 1 om α er en utsagnsvariabel i L
(ii) <υ,R> ⊨ α ↔ ¬(<υ,R> ⊨ β) om βêFm(L) og α= ¬β
(iii) <υ,R> ⊨ α ↔ (<υ,R> ⊨ β → <υ,R> ⊨ γ) om α = (β→γ)
(iv) <υ,R> ⊨ α ↔ βêR om α= Lβ

En formel α i L sies å være gyldig hvis og bare hvis den er sann i enhver halvsyntaktisk modellstruktur <υ,R>

Det er en relativt triviell sak å se at den semantiske teorien vi har presentert her er ekvivalent med den teorien vi presenterte ovenfor. De følgende to satser viser dette:

Teorem 3.1.2 Anta M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Definer en verditiordning υ ved å sette υ(p) =1 hvis og bare hvis pêQ. Definer den halvsyntaktiske modellstrukturen m ved
m=<υ,R>. Da har man for alle formler α i L at αêQ ↔ <υ,R> ⊨ α

Vi utelater beviset for denne sats. Det dreier seg om et ytterst trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L. Som man ser kan vi for enhver halvsyntaktisk modell konstruere en halvsyntaktisk modellstruktur som verifiserer akkurat de samme formlene.

Det omvendte er, som man umiddelbart skjønner også mulig. Vi har:

Teorem 3.1.3 Anta m=<υ,R> er en halvsyntaktisk modellstruktur for L. La Q være den minste formelmengden X i L som inneholder alle de setningsvariablene p der vi har υ(p) =1 og alle Lβ der βêR og som dessuten oppfyller de følgende krav: Er β,γ formler i L har vi at ¬βêX hvis og bare hvis β ikke er med i X og (β→γ) er med i X hvis og bare hvis βêX → γêX. Da har vi:
(i) M=<Q,R> er en halvsyntaktisk modell.
(ii) (Aα)(αêFm(L) → <υ,R> ⊨ α ↔ αêQ

Også når det gjelder denne satsen utelater vi beviset siden det dreier seg om et trivielt induksjonsbevis på lengden av formler i L.

Når det gjelder en halvsyntaktisk modell <υ,R> er det meningen at komponenten R skal representere alle de utsagnene i L som er er nødvendig sanne. Dette stemmer med valusajonsregelen for L som sier at υ(Lα) = 1 hvis og bare hvis αêR. Dette innebærer at en formel av typen "Det er logisk nødvendig at α" er sann hvis og bare hvis α er blandt de formler som er nødvendig sanne i L. Dette virker naturlig. Det er imidlertid et krav som det er naturlig å stille til de halvsyntaktiske modellene dersom L skal tolkes som logisk nødvendighet. Kravet er at alle formlene i L, som jo representerer nødvendige sannheter også er sanne, med andre ord må det kreves at (+) R Inkl Q om <Q,R> er en halvsyntaktisk modell. Det tilsvarende kravet for halvsyntaktiske modellstrukturer vil være (Aα)(αêR → υ(α)=1). Vi skal kalle halvsyntaktiske modeller som oppfyller dette kravet for "sterke" halvsyntaktiske modeller.

Vi kaller den typen modeller vi her har avgrenset for "halvsyntaktiske" fordi den ene komponenten i en slik modell er en mengde med formler. Formler er syntaktiske størrelser.

§4 Maksimalt konsistente mengder.

I det følgende lar vi S stå for et hvilket som helst system som er en utvidelse av det setningslogiske systemet ovenfor.

Anta Δ er en formelmengde i L. Vi sier da at den er *S-konsistent* hvis og bare hvis det ikke er slik at det finnes formler β;1,....,β;n (n>=1) slik at S |- ¬(β;1&...&;n). En mengde med formler Δ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis vi har (i) at Δ er S-konsistent og (ii) at det ikke finnes noen formel β i L som ikke er med i Δ slik at ΔU{β} er S-konsistent.

En maksimalt S-konsistent formelmengde er altså en S-konsistent formelmengde som ikke kan utvides med noen nye formler uten at resultatet blir en formelmengde som ikke er S-konsistent. Vi skal ta for gitt den følgende sats, Lindenbaums lemma, som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en maksimalt S-konsistent mengde.

Teorem 4.1 Er Δ en S-konsistent mengde med formler i L finnes det en mengde Γ med formler i L som er maksimalt S-konsistent og der Δ er inkludert i Γ.

Når det gjelder beviset for denne satsen kan man konsultere Hughes & Cresswell [1], side 150 -152. Vi trenger også det følgende teorem som viser hva slags egenskaper maksimalt konsistente mengder har. Heller ikke her gir vi noe detaljert bevis, men alt som er nevnt i satsen følger lett fra de satsene som er detlajert bevist i Hughes & Cresswell [1] på side 152 - 154.

Teorem 4.2 Anta Δ er en formelmengde i L som er maksimalt S-konsistent. Da gjelder følgende:

(i) (Aα)(αêFm(L) → ¬(αêΔ & (¬α)êΔ))
(ii) (Aα)(αêFm(L) → αêΔ v (¬α)êΔ)
(iii) (Aα)(αêFm(L) → ((¬α)êΔ↔ ¬(αêΔ)))
(iv) (Aα)(αêFm(L) → S |- α → αêΔ)
(v) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → α, (α→β)êΔ → βêΔ)
(vi) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α→β)êΔ ↔(αêΔ → βêΔ)))
(vii) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α↔β)êΔ ↔(αêΔ ↔ βêΔ)))
(viii) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((αvβ)êΔ ↔(αêΔ v βêΔ)))
(ix) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α&β)êΔ ↔(αêΔ & βêΔ)))
(x) S |- α → αêΔ

Man ser fra denne satsen at dersom Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man Δ også er en sannhetsmengde. Dette følger fra punktene (i), (iii) og (v).

Vi har nå samlet sammen de begrepsdannelsene og hjelpesetningene vi trenger for å kunne levere et bevis for fullstendighetsdelen til Teorem 3.3. Vårt bevis er som følger:

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(PC |-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en PC-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt PC-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΓ)

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en halvsyntaktisk modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.1. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΓ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell og den derfor er en modell i klassen |PC|. Vi har nå vist at dersom ¬(PC|-α) så finnes det en semisyntaktisk modell M=<Δ,R> slik at ¬(αêΔ). Dette kan formuleres slik:
(6) ¬(PC|-α) →(EM)(Mê|PC| & ¬(αêπ;1(M))). Vi har siden π;1(M) er en sannhetsmengde at
(7) ¬(EM)(Mê|PC| & ¬(αêπ;1(M))) ↔ (AM)(Mê|PC| →¬ ¬(αêπ;1(M)))
↔ (AM)(Mê|PC| → αêπ;1(M))
Det følger fra (6) og (7) at: (AM)(Mê|PC| → αêπ;1(M)) → PC |-α. Dette viser at punkt (b) i Teorem 3.2 holder. **QED.**

I det følgende skal vi mengden av alle rent setningslogisk gyldige formler med PC*. Vi føyer til stjernen slik at man ikke blander sammen formelmengden PC* med selve systemet PC som vi beskrev i §2. Man har naturlig vis at PC* = {α: αêFm(L) & PC |- α}. Vi bemerker også at man rent mekanisk kan avgjøre om en formel i L er med i PC* eller ikke. Den vanlige metoden med å konstruere sannhetsverditabeller kan brukes i denne forbindelse.

§5 Definisjon av de modalsystemene som vil bli undersøkt.

I det følgende skal vi betegne mengden av alle rent setningslogisk gyldige formler med PC*. Vi føyer til stjernen slik at man ikke blander sammen formelmengden PC* med selve systemet PC som det ble beskrevet i §2. Man har naturlig vis at PC* = {α: αêFm(L) & PC |-α}. Vi bemerker også at man rent mekanisk kan avgjøre om en formel i L er med i PC* eller ikke. Den vanlige metoden med å konstruere sannhetsverditabeller kan brukes i denne forbindelse.

Det setningslogiske modalsystemet E2 er avgrenset slik: Aksiomer i systemet er for det første alle formlene i PC*. I tillegg er alle instanser av de følgende to skjemaer aksiomer i systemet:
(1) Lα→α
(2) L(α→β) → (Lα → Lβ)
Systemet har bare to slutningsregler, nemlig modus ponens:
MP |-α & |- α→β → |- β
og det som vi her skal kalle nødvendighetsregelen:
RE |-α→β → |-Lα→Lβ
Som man ser sier denne regelen at dersom formelen α→β er et teorem i systemet så er også formelen Lα→Lβ et teorem. Man kan definere systemet E2 som den minste formelmengden X i L som inneholder alle de nevnte aksiomer og som i tillegg er lukket under modus ponens og regelen RE.

I stedet for regelen RE kunne man også ha brukt regelen
RE* |- α → |- Lγ → Lα
La oss vise at denne regelen kan utledes i E2. Anta |-α. Siden α→(γ→α) er et teorem i E2 kan vi ved hjelp av modus ponens slutte at |- γ→α. Fra dette og RE følger så |-Lγ →Lα. RE* er følgelig en regel som kan utledes i E2.

Anta på den annen side at vi erstatter RE med RE* i E2. Det kan da vises at man kan utlede regelen RE. For anta for |- α→β. Da har vi ved hjelp av RE* at |- Lα → L(α →β). Fra dette og aksiomet L(α→β)→Lα→Lβ har vi ved hjelp av ren setningslogikk at |-Lα → (Lα→Lβ). Fra dette følger ved hjelp av setningslogikk |- Lα→Lβ. Dette viser at regelen RE er utledbar om man ersatter den med RE*

Systemet E3 er definert som E2 bortsett fra at man erstatter aksiomskjemaet (2) ovenfor med det sterkere skjemaet:

(3) $L(\alpha\to\beta) \to L(L\alpha \to L\beta)$

Systemet E3 har de samme slutningsregler som E2, nemlig modus ponens og RE. På samme måte som ovenfor kan man vise at man får et system som er ekvivalent med E3 om man erstatter slutningsregelen RE med RE*. Dette er fordi skjemaet (2) følger fra (3) og (1).

Før vi går videre innfører vi den følgende konvensjon.

Definisjon 5.1 Vi setter om nêN:

$L(0)(\alpha) = \alpha$

$L(n+1)(\alpha) = L(L(n)(\alpha))$

Man ser fra denne definisjonen at L(1)(α) rett og slett er L(α). Dessuten at L(2)(α) = LLα og så videre.

Definisjon 5.2

(i) Anta X en vilkårlig formelmengde i L. Da setter vi at K(X) er den minste formelmengde Z i L som oppfyller de følgende to krav:
  (a) X Inkl Z
  (b) Er δ en vilkårlig formel i L og αêZ så er også (Lδ→Lα)êZ

(ii) AxE2 = PC* UMg((Lα→α): αêFm(L)) U
Mg((L(α→β)→Lα→Lβ): α,βêFm(L))

(iii) AxE3 = PC* UMg((Lα→α): αêFm(L)) U
Mg((L(α→β)→L(Lα→Lβ)): α,βêFm(L))

Definisjon 5.3 (a) Anta X er en vilkårlig formelmengde i L. Da definerer vi P(n)(X), der n er et naturlig tall, ved den følgende induktive definisjon:

(i) P(0)(X) = X

(ii) P(n+1)(X) = P(n)(X) U Mg((Lα→ Lβ): βêP(n)(X) & αFm(L))

Vi kan nå fiksere presist de systemene vi ønsker å studere:

Definisjon 5.4

(a) Systemet E2* er den minste formelmengden X i L som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE2) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens.

(b) Systemet E3* er den minste formelmengden X i L som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE3) Inkl X
  (ii) X lukket under modus ponens.

(c) Systemet S(n), der n er et naturlig tall, er er definert som den minste formelmengden X i L som oppfyller følgende krav:
  (i) P(n)(AxE2) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens.

(d) Systemet Π(n), for n>=0, er definert som den minste formelmengden X i L som oppfyller følgende krav:

(i) P(n)(AxE3) Inkl X
(ii) X er lukket under modus ponens.[2]

Vi definerer systemene S2 og S3 samt systemsekvensen S2(n) der n>=0 ved

Definisjon 5.5
(a) Systemet S2 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE2) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens
(b) Systemet S3 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE3) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens
(c) Systemet S2(n) er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE2)U Mg(L(n)(α→α): αêFm(L))
  (ii) X er lukket under modus ponens
(d) Systemet S2(∞) er den minste formelmengden X som oppfyller de følgende krav:
  (i) K(AxE2)U Mg(L(n)(α→α): nêN & αêFm(L))
  (ii) X er lukket under modus ponens

Systemene S6 - S8 er definert slik:

Definisjon 5.6
(a) Systemet S6 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE2) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) U Mg(MMα: αêFm(L)) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens
(b) Systemet S7 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE3) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) U Mg(MMα: αêFm(L)) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens
(c) Systemet S8 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
  (i) K(AxE3) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) U Mg(LMMα: αêFm(L)) Inkl X
  (ii) X er lukket under modus ponens

Noen viktige resultater angående de systemene vi har definert:

Teorem 5.1 Anta α er en vilkårlig formel i L
  (a) E2 |- α ↔ αêE2*
  (b) E3 |- α ↔ αêE3*

Bevis: (I) Vi viser først inklusjonen mot venstre i (a), med andre ord at enhver formel i E2* er et teorem i E2. Det er da nødvendig å vise at alle formlene i K(AxE2) er teoremer i E2, med andre ord at (1) K(AxE2) Inkl Mg(α: αêFm(L) & E2|- α). Siden K(AxE2) er definert induktivt er det først nødvendig å vise at alle formlene i PC*, og alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→ Lα→Lβ er teoremer i E2. Men alle disse formlene er også aksiomer i E2 og derfor teoremer i E2. Det eneste vi derfor må gjøre er å å vise at dersom γ er en vilkårlig formel i L og E2 |- δ, så har man også E2 |- Lγ →Lδ. Anta derfor at E2 |- δ. Ved hjelp av ren setningslogikk har vi da E2 |- γ →δ. Men fra dette kan man ved hjelp av regelen RE, som er en slutningsregel i E2, slutte E2|- Lγ → Lδ. Dermed har vi vist at (2) (Aα)(αêFm(L) → αêK(AxE2) → E2 |-α).

---

[2] Akiomatiseringene E2* og E3* av henholdsvis E2 og E3 er hentet fra Kripke. Se Kripke [2], side 207-210. Også aksiomatiseringene av S2, S3, S6 - S7 er hentet fra Kripke [2].

Tilslutt bemerker vi at mengden av teoremer i E2 er lukket under modus ponens. Fra dette og dette og (4) følger at E2* er inkludert i mengden av teoremer i E2.

(II) Det er også nødvendig å vise at mengden av teoremer i E2 er inkludert i E2*. Vi må da først vise at aksiomene i E2 er teoremer i E2*. Det er klart at PC*, mengden av alle de setningslogisk gyldige formlene i L, er teoremer i E2*. Vi har jo PC* Inkl K(AxE2) Inkl E2* i lys av definisjonen av E2*. Videre er det klart at alle formler av typen Lα → α og L(α→B) → (Lα → Lβ) er med i K(AxE2) og derfor er aksiomer i E2*. Dette viser at alle aksiomene i E2 er med i E2*.

For å vise at alle teoremene i E2 er med i E2* vil det nå være tilstrekkelig å vise at (1) E2* er lukket under modus ponens og at vi har (2) (Aα)(Aβ)(βêE2* → (Lα→Lβ)êE2*). Det første er trivielt siden E2* per definisjon er lukket under modus ponens. Det andre krever bevis. E2* er induktivt definert. Man må derfor vise (2) ved induksjon på E2*. Det være tilstrekkelig å vise følgende:

(3) (Aβ)(βêK(AxE2) → (Lγ→Lβ)êE2*)
(4) (Aα)(Aβ)(Aγ)((Lγ→Lα) êE2* & (Lγ→L(α→β))êE2* → (Lγ→Lβ) êE2*)

Vi viser først at (4) holder. Anta for vilkårlige formler α,β,γ at

(5) (Lγ→Lα)êE2* & (Lγ→L(α→β))êE2*. Siden L(α→β)→Lα→Lβ er et aksiom i E2*, siden det er med i K(AxE2), har vi (L(α→β) →(Lα→Lβ))êE2*. Fra dette og (5) følger, siden E2* inkluderer alle setningslogisk gyldige formler og dessuten er lukket under modus ponens, at Lγ→(Lα→Lβ)êE2*. Men fra dette og den første konjunkten i (5) følger ved nok en anvendelse av setningslogiske aksiomer[3] og modus ponens at (Lγ→Lβ)êT*. Dette viser at (4) holder.

La oss så se på (3). Anta αêK(AxE2). Siden K(AxE2) er induktivt definert må påstanden vises ved induksjon på K(AxE2). Anta δ er en tautologi, en formel av typen Lα→α eller en formel av typen L(α→β)→(Lα→Lβ). Da har vi δêAxE2 og derfor siden AxE2 Inkl K(AxE2) at δêK(AxE2). Da følger (Lγ → Lδ)êK(AxE2) . Dermed er basistrinnet bevist. Anta nå for vilkårlig formel δ at δêK(AxE3). Da har vi i lys av definisjonen av operasjonen K at (Lγ → Lδ)êK(AxE3) . Dette viser at også induksjonstrinnet holder.

Beviset ovenfor kan lett modifiseres slik at vi også får et bevis for punkt (b). man får et slikt bevis om man over alt i beviset ovenfor erstatter alle forekomster av "E2" med"E3". Dessuten må man huske på at L(α→β) → L(Lα→Lβ) er et aksiom i E3. Dette må settes inn på passende steder istedet for L(α→β) → Lα→Lβ). Man trenger også det faktum den første av disse formlene impliserer den siste, når man skal vise (4) ovenfor.

Dermed har vi gitt et bevis for satsen. **QED.**

Teorem 5.2

(a) K(AxE2) = UN/nêN/(P(n)(AxE2))
(b) K(AxE3) = UN/nêN/(P(n)(AxE3))
(c) (An)(nêN → S(n) Inkl S(n+1))
(d) (An)(nêN → Π(n) Inkl Π(n+1))

Bevis: *Ad (a)*: Vi beviser først inklusjonen mot høyre. Dette gjøres ved induksjon på K(AxE2). Vi har i lys av definisjonen av operasjonen P(n) at P(0)(X) = X. Derfor har vi

---

[3] Vi benytter den setningslogisk gyldige formelen (Lγ →Lα) → ((Lγ → (Lα→Lβ)) → (Lγ→Lβ)) som er et aksiom i E2* og modus ponens.

AxE2 = P(0)(AxE2) Inkl UN/nêN/(P(n)(AxE2)). Dette viser at basistrinnet holder. Anta nå som induksjonshypotese: (1) δ êUN/nêN/(P(n)(AxE2)). Da finnes det noe nêN slik at (2) δê(P(n)(AxE2). Fra definisjonen av P har man nå:

(3) P(n+1)(AxE2) = P(n)(AxE2)U Mg(Lγ →Lδ: γêFm(L) & δêP(n))

Fra (2) og (3) har man: (Lγ→Lδ)êP(n+1)(AxE2). Det følger at (Lγ→Lδ)êUN/nêN/(P(n)(AxE2)) Dette viser at induksjonstrinnet holder og derfor også at inklusjonen mot høyre i (a) holder.

Vi må imidlertid også vise at inklusjonen mot venstre holder. Vi viser:

(4) (An)(nêN → P(n)(AxE2) Inkl K(AxE2)). Dette bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: n=0. Da har vi ved hjelp av definisjonen av P at P(0)(AxE2) = AxE2 Inkl K(AxE2).

Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese: (5) P(n)(AxE2) Inkl K(AxE2). Nå det gjelder K har vi i lys av definisjonen: (6) (Aγ)(Aδ)(γêFm(L) & δêK(AxE2) → (Lγ→Lδ)êK(AxE2))

Fra definisjonen av P har vi:

(7) P(n+1)(AxE2) = P(n)(AxE2)U Mg(Lγ →Lδ: γêFm(L) & δêP(n)(AxE2)) Anta nå for vilkårlig for vilkårlig δ at δêP(n+1)(AxE2). Da kan vi skille mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): δêP(n)(AxE2). Da følger det umiddelbart fra induksjonshypotesen at δêK(AxE2). Tilfelle (ii): δêMg(Lγ →Lδ: γêFm(L) & δêP(n)). Da finnes det γ og δ1 slik at (8) δ1êP(n)(AxE2) & δ=(Lγ→Lδ1). Fra den første konjunkten og induksjonshypotesen følger δ1êK(AxE2). Fra dette, den andre konjunkten i (8) og (6) følger δêK(AxE2). I begge tilfelle har vi δêK(AxE2). Men δ var et vilkårlig element i P(n+1)(AxE2). Vi har derfor vist:

P(n+1)(AxE2) Inkl K(AxE2). Dette viser at induksjonstrinnet holder. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for (4). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Vi får et bevis for dette punktet om vi erstatter alle forekomster av "E2" i beviset under foregående punkt med "E3".

Ad (c): Anta nêN. Vi må vise at S(n) Inkl S(n+1). Dette vises ved induksjon på S(n). Vi har

P(n)(AxE2) Inkl P(n)(AxE2)U
Mg(Lγ →Lδ: γêFm(L) & δêP(n)(AxE2)) = P(n+1)(AxE2)

Men P(n+1)(AxE2) er aksiomene i S(n+1). Det følger at aksiomene i S(n) er inkludert blandt dem i S(n+1). Siden S(n+1) er lukket under modus ponens følger at S(n) Inkl S(n+1).

Ad (d): Man får et bevis for dette punktet om man over alt i det foregående punk erstatter "S" med "Π" og alle forekomster av "E2" med "E3".

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 5.3

(a) E2* = UN/n,0,∞/(S(n)) & E3* = UN/n,0,∞/(Π(n))
(b) E2* Inkl S2
(c) E3* Inkl S3

Bevis: *Ad (a)*: Vi beviser først den første konjunkten. Først tar vi for oss inklusjonen mot venstre. Vi viser (An)(nêN → S(n) Inkl E2*). Fra dette følger åpenbart UN/nêN/(S(n)) Inkl E2*. Anta nêN. Da har vi at aksiomene i S(n) er P(n)(AxE2). Denne mengden er etter foregående teorem inkludert i K(AxE2) og derfor blandt aksiomene i E2*. Vi har også at E2* er lukket under modus ponens. Det følger derfor ved induksjon på S(n) at S(n) Inkl E2*.

La oss så vise inklusjonen mot høyre i den første konjunkten. Vi viser dette ved induksjon på E2*. Anta αêK(AxE2). Da har vi ved hjelp av forrige teorem at αêP(n)(AxE2) for noe nêN. Da er α et aksiom i S(n) og derfor αêS(n) Inkl UN/nêN/(S(n)). Dette viser at K(AxE2) Inkl UN/nêN/(S(n)).

Vi må også vise UN/nêN/(S(n)) er lukket under modus ponens. Anta derfor (1) αêUN/nêN/(S(n)) og (2) α→βêUN/nêN/(S(n)) Fra (1) følger at det finnes mêN slik (3) αêS(m). Likeledes har vi fra (2) at det finnes pêN slik at (α→β)êS(p). La r være det største av de to tallenen m,p. Siden S(n) Inkl S(n+1) for alle n ifølge det forrige teoremet har vi αêS(r) & (α→β)êS(r). Men S(r) er lukket under modus ponens derfor bêS(r) Inkl UN/nêN/(S(n)). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

For å bevise den andre konjunkten i (a) behøver man bare ovenfor å erstatte alle forekomster av "E2" med "E3" og alle forekomster av "S" med "Π".

Ad (b): Vi har åpenbart at mengden av aksiomer i E2*, som er K(AxE2) er inkludert i K(AxE2) U Mg(L(α→α): αêFm(L)) som er mengden av aksiomer i S2. Siden S2 også er lukket under modus ponens følger det at E2* Inkl S2

Ad (c): Dette bevises på nøyaktig samme måte som under forrige punkt. Man ersatter bare "E2" med "E3" og "S2" med "S3". **QED**.

Med falsum-systemet, som vi betegner med "F", forstår vi den minste formelmengden i L som er lukket under modus ponens og som inneholder PC* U Mg(¬Lα: αêFml(L)). Aksiomer i falsum-systemet er altså alle setningslogisk gyldige formler i L pluss alle formler av typen ¬Lα. Systemene S2 og S3 er åpenbart uforenelige med falsum-systemet siden S2 og S3 inneholder skjemaet L(α→α) som et aksiomskjema. Derimot er systemene E2 og E3 inkludert i falsumsystemet. Det gjelder også alle systemene i rekkene <S(n)>/nêN/ og <Π(n)>/nêN/.

Teorem 5.4 Vi har:
(a) E2* Inkl F & E3* Inkl F
(b) (An)(nêN →. S(n) Inkl F & Π(n) Inkl F)

Bevis: Ad (a): Vi viser (a) ved induksjon på teoremer i E2* (E3*). Siden F er lukket under modus ponens er det nok å vise at K(AxE2) Inkl F. Det er klart at PC* Inkl F. Det er også klart at vi har F|- Lα→α. Vi har jo ¬Lα → (Lα→α) er en setningslogisk gyldig formel og at ¬Fα et aksiom i F. Da følger det at Lα→α er et teorem ved hjelp av modus ponens. Det er heller ikke vaskelig å se at L(α→β) → (Lα→Lβ) er et teorem dersom ¬Lα er det. Det følger at F |- L(α→β) → (Lα→Lβ). Alt dette viser at (1) AxE2 Inkl F. Man kan også lett vise at det følgende E3-aksiom, nemlig L(α→β) → L(Lα→Lβ) er et teorem i F. Det følger derfor at (2) AxE3 Inkl F

Anta δêF. Vi må da vise at(Lα→ Lδ)êF. Men dette er igjen opplagt siden enhver formel av typen Lα→Lδ er et teorem i F siden F|- ¬Lα. Sammen med (1) og (2) impliserer dette at K(AxE2) såvel som K(AxE3) er inkludert i F. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Vi har tidligere vist:
(An)(nêN → S(n) Inkl E2*) & (An)(nêN → Π(n) Inkl E3*)
Dette og (a) impliserer at (b) holder. **QED.**

§6 Halvsyntaktiske modellklasser for de unormale systemene. Gyldighet.

Vi vil nå avgrense forskjellige mengder av halvsyntaktiske modeller som svarer til de forskjellige modalsystemene i avgrenset i forrige avsnitt. Vi definerer først hva som menes med E2 -modeller og E3-modeller.

Definisjon 6.1 (a) Med en E2-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R enten er den tomme mengden eller, dersom den er ikke-tom, oppfyller følgende krav:

(1) α, (α→β)êR → βêR. (R er lukket under modus ponens.)
(2) K(AxE2) Inkl R
(3) R Inkl Δ

(b) Med en E3-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R enten er den tomme mengden eller, dersom den er ikke-tom, oppfyller følgende krav:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR.
(2) K(AxE3) Inkl R
(3) R Inkl Δ

For å få en bedre forståelse av forholdet mellom E2 (E3) og S2 (S3) er det hensiktsmessig å innføre begrepet falsum-modell. En falsum-modell er en halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> der R er den tomme mengde. Det setningslogiske systemet man får når PC utvides med alle formler av typen ¬Lα som nye aksiomer, og der slutningsreglene er de samme som i PC, kaller vi for falsum systemet. Vi betegner dette med F. Man kan lett vise, dette vil bli gjort nedenfor, at en formel α er et teorem i falsumsystemet hvis og bare hvis den er gyldig i alle falsum-modeller. I det følgende betegnes mengden av alle E2 (E3)-modeller med |E2|, (|E3|). Mengden av falsum -modeller betegnes med |F|.

Vi definerer så hva som menes med en S2 og S3-modell:

Definisjon 6.2 (a) Med en S2-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav:

(1) α, (α→β)êR → βêR. R er lukket under modus ponens.
(2) K(AxE2) Inkl R
(3) R Inkl Δ

(b) Med en S3-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR.
(2) K(AxE3) Inkl R
(3) R Inkl Δ

Mengden av S2 (S3)-modeller betegnes med |S2| (|S3|).

Teorem 6.1 Anta α er en vilkårlig formel i L. Da gjelder:

(a) αêF → (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))
(b) αêE2 → (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))
(c) αêE3 → (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))
(d) αêS(n) & nêN → (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))
(e) αêΠ(n) & nêN → (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M))

Bevis: Ad (a): Dette bevises ved induksjon på mengden av teoremer i F. Aksiomer i F er alle de setningslogiske gyldige formlene i L, samt alle formler av typen ¬Lα. Siden enhver setningslogisk gyldig formel er med i π;1(M) for enhver halvsyntaktisk modell M følger det at disse også holder i enhver falsum-modell, siden falsum-modellene er en underklasse av de halvsyntaktiske modellene. Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig falsum-modell og anta for reduktio ad absurdum at LαêΔ = π;1(M). Da har vi αêR, og derfor at R≠ø. Dette er imidlertid umulig siden M er en F-modell. Det følger at ¬(LαêΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde følger (¬Lα)êΔ. Dette viser at ¬Lα holder i alle F-modeller. Det skulle være klart at dersom α og α→β holder i alle F-modeller gjør β det også. Modus ponens bevarer altså F-gyldighet. Det følger fra dette at alle teoremer i F holder i enhver F-modell. Dette viser at (a) holder. Fra Teorem 5.4 ser man at vi har E2, E3 Inkl F. Fra dette og (a) kan man slutte at (b) og (c) holder. Videre har man fra Teorem 5.4 at S(n) og Π(n) er inkludert i F for alle nêN. Dette og (a) viser riktigheten av punktene (d) og (e). **QED.**

Teorem 6.2 Er α en vilkårlig formel i L har man:
(a) αêAxE2 → (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M))
(b) αêAxE3 → (AM)(Mê|E3| → αêπ;1(M))
(c) αêP(n)(AxE2) → (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M))
(d) αêP(n)(AxE3) → (AM)(Mê|E3| → αêπ;1(M))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) αêAxE2 og (2) Mê|E2| & M= <Δ,R> Siden M er med i |E2| er det to muligheter. Tilfelle (i): M er en falsum-modell. I så tilfelle har vi αêπ;1(M) vd hjelp av Teorem 5.4 siden AxE2 Inkl K(AxE2) Inkl E2* Inkl F. Tilfelle (ii): M er ikke en falsummodell.

Da har vi etter definisjonen av en E2-modell at R oppfyller de følgende krav:
(3.1) α,α→βêR → βêR
(3.2) K(AxE2) Inkl R
(3.3) R Inkl Δ

Siden αêAxE2 er det tre muligheter. Enten er αêPC eller så er α=(Lβ→β) for en eller annen formel β eller så er det slik at α= L(γ→δ) → (Lγ → Lδ) for visse formler δ,γ. I det første tilfelle er α med i Δ = π;1(M) fordi Δ er en sannhetsmengde. Anta LβêΔ for vilkårlig β. Siden M er en halvsyntaktisk modell har vi da at βêR. Fra dette og (3.3) følger så βêΔ. Vi har altså, siden β var vilkårlig: LβêΔ → βêΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger fra dette at α=(Lβ→β)êΔ = π;1(M). I det siste tilfellet har vi at α= L(γ→δ) → Lγ →Lδ. Anta for vilkårlig δ,γ at L(γ→δ)êΔ & LγêΔ. Fra kravene til en halvsyntaktisk modell følger da γ→δ, γêR. Fra dette og (3.1) har vi så δêR og derfor LδêΔ. Vi har vist L(γ→δ)êΔ & LγêΔ → LδêΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav at α= (L(γ→δ) → Lγ →Lδ)êΔ = π;1(M). Vi har dermed vist at (a) holder.

Ad (b): Dette vises i hovedsak nøyaktig på samme måte. Man kan sette inn "E3" for alle forekomster for "E2" i beviset ovenfor. Men den siste delen av beviset må endres. I tilfelle α= L(γ→δ) →L(Lγ→Lδ) kan resonnementet gjennomføres slik: Anta for vilkårlige δ,γ at L(γ→δ)êΔ. Da har vi (γ→δ)êR. Siden M=<Δ,R> nå forutsettes å være en E3-modell har vi ved hjelp av Definisjon 6.1 at (Lγ →Lδ)êR. Fra dette følger L(Lγ →Lδ)êΔ siden M er en halvsyntaktisk modell. Siden γ,δ var vilkårlige formler har vi vist L(γ→δ)êΔ →L(Lγ→Lδ)êΔ. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger α= (L(γ→δ) →L(Lγ→Lδ))êΔ=π;1(M). Dette viser at (b) holder.

Ad (c): Dette vises ved induksjon på n.

Basistrinn: Vi viser først (1) αêP(0)(AxE2) →(AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). Vi har etter Definisjon 5.3 at P(0)(AxE2) = AxE2. Man ser da at (1) følger fra dette og punkt (a).

Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese at (c) holder for n. Vi skal da vise at

(2) αêP(n+1)(AxE2) → (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). Anta derfor at (3) αêP(n+1)(AxE2) og at (4) M=<Δ,R> er et vilkårlig element i |E2|. Er M en falsummodell har vi

αêP(n+1)(AxE2) Inkl UN/nêN/(P(n)(AxE2)) = K(AxE2) Inkl E2 Inkl F. Ved hjelp av Teorem 5.4 har vi derfor αêπ;1(M) i dette tilfellet.

Anta M ikke er en falsum modell. Da har vi at M=<Δ,R> oppfyller følgende krav:

(4) K(AxE2) Inkl R. Nå har vi ved hjelp av Definisjon 5.3

(5) P(n+1)(AxE2) = P(n)(AxE2)U Mg(Lγ→Lδ: δêP(n)(AxE2) &γêFm(L))

Fra (3) og (5) følger: αêP(n)(AxE2)U Mg(Lγ→Lδ: δêP(n)(AxE2) &γêFm(L)).

Vi skiller mellom to tilfelle: *Tilfelle (i)*: αêP(n)(AxE2). Da har vi etter induksjonshypotesen at (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). *Tilfelle (ii)*: Vi har at αê Mg(Lγ→Lδ: δêP(n) &γêFm(L)). Da finnes det δ,γ slik at (6) α=(Lγ→Lδ) & δêP(n) (AxE2)

Nå har vi ved hjelp av Teorem 5.2 at P(n)(AxE2) Inkl K(AxE2) Inkl R. Fra dette og (6) følger at δêR og derfor at LδêΔ siden M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell. Men siden Δ da er en sannhetsmengde har vi α=(Lγ→Lδ)êΔ = π;1(M). Men M var en vilkårlig modell i |E2|. Vi har derfor i alle tilfelle at αêπ;1(M). Det følger at (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). Dette viser at (c) holder.

Ad (d): Man får faktisk et bevis for dette dersom man erstatter alle forekomster av uttrykket "E2" med "E3" overalt i det foregående punkt. Man skriver altså overalt "AxE3" istedet for "AxE2" og lar "E3" overalt erstatte "E2".

Teorem 6.3 Anta α er en vilkårlig formel i L. Da har man:

(a) αêK(AxE2) → (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M))
(b) αêK(AxE3) → (AM)(Mê|E3| → αêπ;1(M))
(c) αêE2* → (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M))
(d) αêE3* → (AM)(Mê|E3| → αêπ;1(M))
(e) αêS2 → (AM)(Mê|S2| → αêπ;1(M))
(f) αêS3 → (AM)(Mê|S3| → αêπ;1(M))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) αêK(AxE2). Vi har ved hjelp av Teorem 5.2 at K(AxE2)=UN/nêN/(P(n)(AxE2)). Fra dette og (1) følger da ved hjelp av Teorem 6.2 at (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M))

Ad (b): Anta αêK(AxE3). Igjen har man ved hjelp av Teorem 5.2 at K(AxE2)=UN/nêN/(P(n)(AxE2)). Fra dette og (1) følger da ved hjelp av Teorem 6.2 at (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)).

Ad (c): Dette vises ved induksjon på mengden av teoremer i E2*. Er α et aksiom i E2*, det vil si er αêK(AxE2) følger satsen ved hjelp av punkt (a). man ser imidlertid lett at modusponens bevarer E2-gyldighet. Dette viser at (c) holder.

Ad (d): Dette vises ved induksjon på mengden av teoremer i E3*. Er α et aksiom i E3*, det vil si er αêK(AxE2), følger satsen ved hjelp av punkt (a). Man ser også lett at modus ponens bevarer E2-gyldighet. Dette viser at (c) holder.

Ad (e): Aksiomene i S2 er dem i E2, dvs. K(AxE2), pluss alle formler av typen L(α→α). For å vise at (e) holder er det derfor bare nødvendig å vise at L(α→α) holder i alle S2-modeller. Anta derfor at M=<Δ,R> er en vilkårlig S2-modell. Da har man at K(AxE2) Inkl R. Siden (α→α)êPC* Inkl AxE2 Inkl K(AxE2) følger det at (α→α)êR. Siden enhver S2-modell selvfølgelig er en halvsyntaktisk modell har vi derfor L(α→α)êΔ = π;1(M). Dette viser at (e) holder.

Ad (f): Aksiomene i S3 er dem i E3, dvs. K(AxE3) pluss alle formler av typen

L(α→α). For å vise at (f) holder er det derfor bare nødvendig å vise at L(α→α) holder i alle S3-modeller. Anta derfor at M=<Δ,R> er en vilkårlig S3-modell. Da har man at K(AxE3) Inkl R. Siden
(α→α)êPC* Inkl AxE3 Inkl K(AxE3) følger det at (α→α)êR. Siden enhver S3-modell selvfølgelig er en halvsyntaktisk modell har vi derfor L(α→α)êΔ =π;1(M). Dette viser at (f) holder. **QED.**

Definisjon 6.3 (a) Med en *S6-modell* forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav:

(1) α, (α→β)êR → βêR. R er lukket under modus ponens.
(2) K(AxE2) Inkl R
(3) R Inkl Δ
(4) (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR))

(b) Med en *S7-modell* forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR.
(2) K(AxE3) Inkl R
(3) R Inkl Δ
(4) (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR))

(b) Med en *S8-modell* forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR.
(2) K(AxE3) Inkl R
(3) R Inkl Δ
(4) (Aα)(αêFm(L) → MMα êR)

Vi betegner klassen av S6 (S7, S8)-modeller med |S6| (|S7|, |S8|). Det følgende gyldighetsteorem holder for systemene S6, S7 og S8:

Teorem 6.3 Anta α er en vilkårlig formel i L. Da har man:

(a) αêS6 → (AM)(Mê|S6| → αêπ;1(M))
(b) αêS7 → (AM)(Mê|S7| → αêπ;1(M))
(c) αêS8 → (AM)(Mê|S8| → αêπ;1(M))

Bevis: *Ad (a)*. Aksiomene i S6 er dem i S2 pluss aksiomet MMα. Siden S6-modellene er en underklasse av S2-modellene er det klart at alle S2-teoremene holder i enhver S6-modell. Det eneste vi behøver å vise er at MMα holder i enhver S6-modell. Anta derfor M=<Δ,R> er en vilkårlig S6-modell. Fra Definisjon 6.3 fremgår det da at (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR)). Herav følger at ¬(L(¬α)êR). Fra definisjonen av S6-modell følger da ¬(LL(¬α)êΔ). Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav (¬LL¬α)êΔ. Fra dette har vi så MMαêΔ = π;1(M). Dette viser at MMα holder i alle s6-modeller.

Ad (b): Beviset for dette blir helt analogt med det under (a). Faktisk kan man bruke det som står under (a) ordrett bortsett fra at man må erstatte alle forekomster av "S2" og "S6" overalt med henholdsvis "S3" og "S7".

Ad (c): Aksiomene i S8 er dem i S3 pluss aksiomt LMMα. Siden S8-modellene er en delmengde av S3-modellene er alle S3-teoremer S8-gyldige. For å vise at ethvert S8-teorem er gyldig er det derfor nok å vise at LMMα holder i enhver S8-modell. Dette ser man meget raskt: La M=<Δ,R> være en vilkårlig S8-modell. Fra definisjonen av S8-modell følger da at MMαêR. Siden en S8-modell er en halvsyntaktisk modell følger derfor at LMMαêΔ. Herav har vi naturligvis LMMαêπ;1(M). **QED.**

Vi skal nå ta for oss systemsekvensene <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>nêN/ og fastsette modellteorien for disse systemene:

Definisjon 6.4 (a) Med en S(n)-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R enten er den tomme mengden eller oppfyller følgende krav:

(1) α, (α→β)êR → βêR. R er lukket under modus ponens.
(2) P(n-1)(AxE2) Inkl R om n>0
(3) R Inkl Δ

(b) Med en Π(n)-modell forstår vi en halvsyntaktisk modell M= <Δ,R> der R enten er den tomme mengden eller oppfyller følgende krav:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR.
(2) P(n-1)(AxE3) Inkl R om n>0
(3) R Inkl Δ

(c) Med en S2(n)-modell, der n>=1 forstår vi en S2- modell M= <Δ,R> der R oppfyller følgende krav: (Aα)(αêFm(L) → L(n-1)(α→α)êR)

På samme måte som tidligere betegner vi mengden av S(n) (Π(n), S2(n)) -modeller med |S(n)| (|Π(n)|, |S2(n)|). La S være et av de systemene som nå har blitt avgrenset. Vi sier da at en formel α i L er S-gyldig hvis og bare hvis man har at αêΔ for enhver model M= <Δ,R> som er med i |S|.

Teorem 6.4 Vi har:

(a) αêS(n) → α er S(n)-gyldig (n>=0)
(b) αêΠ(n) → α er Π(n)-gyldig (n>=0)
(c) αêS2(n) → α er S2(n)-gyldig (n>=1)

Bevis: *Ad (a)*: Dette bevises ved induksjon på n.

Basistrinn: Vi viser at påstanden holder for n=0. Det er da nødvendig å vise at alle formlene i P(0)(AxE2) = AxE2 er S(n)-gyldige og at modus ponens bevarer S(n)-gyldighet. Det siste er opplagt: Er α og α→β gyldige i enhver S(n)-modell, og har vi at M=<Δ,R> er en slik modell, må vi ha at α,α→βêΔ og derfor at βêΔ siden Δ er en sannhetsmengde. Det følger da at β er S(n)-gyldig. At alle formlene i AxE2 er S(n)-gyldige er også opplagt. Alle setningslogiskgyldige skjemaer er med i enhver sannhetsmengde Δ og derfor gyldige i enhver S(n)-modell. At alle formler av typen Lα→α og L(α→β)→Lα→Lβ er gyldige i enhver S(n)-modell følger fra kravene (1) og (3) under punkt (a) i Definisjon 6.4 om R≠ø. At de er gyldige i alle falsum-modeller har vi også vist tidligere.

Induksjonstrinn: Anta som induksjonshypotese: (1) (Aα)(αêS(n) → α er S(n)-gyldig) Anta nå at (2) αêP(n+1)(AxE2) og (3) M =<Δ,R> er en vilkårlig S(n+1)-modell.

Tilfelle (i): M er en falsum-modell. I så tilfelle følger det at αêπ;1(m) fordi alle E2-teoremene holder i enhver falsum-modell og vi har S(n+1) inkl E2.

Tilfelle (ii): M er ingen falsum-modell. Da har vi at R≠ø og at R oppfyller de følgende krav:

(4) α,α→βêR → βêR

(5) R Inkl Δ
(6) P(n)(AxE2) Inkl R

Fra (2) følger det at αê P(n)(AxE2)U Mg((Lγ→Lδ): δêP(n)(AxE2) & γêFm(L))
Er αêP(n)(AxE2) har vi αêS(n) og derfor ifølge (1) at α er S(n)-gyldig. Men siden mengden av S(n+1) modeller er inkludert i mengden av s(n)-modeller følger det at α da må holde i alle S(n+1)-modeller. Det følger i dette tilfelle at αêπ;1(M), siden M er en S(n+1)-modell.

Er på den annen side αêMg((Lγ→Lδ): δêP(n)(AxE2) & γêFm(L)) følger det at det finnes γ,δ slik at (7) γêFm(L) & α=(Lγ→Lδ) & δêP(n)(AxE2). Fra den siste konjunkten her følger ved hjelp av (6) at αêR. Siden M er en halvsyntaktisk modell kan vi da slutte at LδêΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde kan vi i sin tur slutte fra dette at α=(Lγ→Lδ)êΔ. Det følger at αêπ;1(M).

Vi har nå vist at alle formlene i P(n+1)(AxE2) er S(n+1)-gyldige. Siden modus ponens åpenbart bevarer S(n+1)-gyldighet følger det at alle formler i S(n+1) er S(n+1)-gyldige. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Dette vises på samme måte som under (a). man ersatter bare alle forekomster av uttrykket "E2" med "E3" og alle forekomster av "S(n)" og "S(n+1)" med henholdsvis "Π(n)" og "Π(n+1)".

Ad (c): For å vise dette er det tilstrekkelig å vise at L(n)(α→α) holder i alle S2(n)-modeller (n>=1). La derfor M=<Δ,R> være en vilkårlig S2(n)-modell. Fra Definisjon 6.4 har vi da at L(n-1)(α→α)êR. Fra dette følger at L(n)(α→α) êΔ, med andre ord at L(n)(α→α)êπ;1(M). Dette viser at L(n)(α→α) er S2(n)-gyldig.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§7 Halvsyntaktiske modellklasser for de unormale systemene. Fullstendighet.

Vi har definert et temmelig stort antall modallogiske systemer. Det dreier seg om først og fremst om de syv systemene E2, E3, S2, S3, S6, S7 og S8. Men vi har også definert tre sekvenser av systemer, nemlig: <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>/nêN/. Til hvert av disse systemene har vi avgrenset en korresponderende modelklasse. Er S et av de nevnte systemer betegner |S| den korresponderende klasse av halvsyntaktiske modeller. I forrige avsnitt har vi også vist for hvert av de nevnte systemer at dersom α er en formel som er et teorem i systemet S har vi at α er S-gyldig, dvs. at (AM)(Mê|S| → αê π;1(M)). Vi skal i dette avsnittet vise at det omvendte holder for alle våre systemer S: Er α en S-gyldig formel er den også et teorem i S.

Teorem 7.1 (Fullstendighetsteorem I) Anta S er et av systemene E2, E3, S2, S3, S6, S7 og S8 eller et system i en av rekkene <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>/nêN/. Anta Γ er en S-konsistent mengde. Da finnes det en S-modell M=<Δ,R> slik at Γ Inkl Δ.

Bevis: Anta S er et av de nevnte systemer og at Γ er en S-konsistent mengde. Ved hjelp av Lindenbaums lemma, Teorem 4.1, kan Γ utvides til en maksimalt S-konsistent mengde Δ slik at (1) Γ Inkl Δ. Denne mengden Γ vil, i lys av Teorem 4.2, ha alle de egenskapene som en sannhetsmengde har. Vi definerer nå R ved å sette (2) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ). Videre definerer vi M ved å sette per definisjon: (3) M=<Δ,R>. Vi har da at umiddelbart ved hjelp av (2) at (4) (Aα)(αêFm(L) → (αêR ↔ LαêΔ)). Fra (2) - (4) og det faktum at Δ er en sannhetsmengde fremgår det at M er en halvsyntaktisk modell. Det som nå må gjøres er å vise at M er en S-modell. Vi bemerker først at alle våre systemer inneholder som teoremer formlene Lα→α og L(α→β)→ Lα→Lβ. I lys av Teorem 4.2 innebærer dette at

(5) (Lα→α)êΔ og

(6) (L(α→β)→(Lα→Lβ))êΔ.

Fra det at Δ er en sannhetsmengde, samt (2), utleder man lett fra dette at

(7.1) R Inkl Δ og
(7.2) αêR & (α→β)êR → βêR

Vi skal nå gå igjennom rekken av systemer å vise ved hvert system S at modellen ovenfor kan vises å ha de egenskaper som kreves av en S-modell.

Tilfelle (i): S er systemet S(0). Man ser da umiddelbart fra (7.1), (7.2) og Definisjon 6.4a at M oppfyller de krav som stilles til en S(0)-modell. Satsen holder derfor i dette tilfelle.

Tilfelle (ii): S er systemet S(n) der n>0. I lys av Definisjon 6.4a er det da nødvendig å vise at (8) P(n-1)(AxE2) Inkl R dersom R≠ø. I lys av Teorem 4.2 har vi at alle teoremer i S(n) er med i Δ. Dette innebærer at S(n) Inkl Δ. Fra dette følger i sin tur at (9) P(n)(AxE2) Inkl Δ. Siden

P(n)(AxE2) = P(n-1)(AxE2) U Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n-1)(AxE2))

har vi ved hjelp av (9) at:

(10) Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n-1)(AxE2)) Inkl Δ.

Anta nå at R≠ø og la δ være en vilkårlig formel der (11) δêP(n-1)(AxE2). Siden M oppfyller kravet (4) har vi, siden R≠ø at det finnes γ slik at (12) γêR. Fra (10), (11) og (12) følger at (Lγ →Lδ)êΔ. Fra (4) og (12) følger LγêΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger fra LγêΔ & (Lγ→Lδ)êΔ at LδêΔ. Dette og (4) impliserer så δêR. Men δ var en vilkårlig formel. Vi har derfor vist at dersom R≠ø så har man P(n-1)(AxE2) Inkl Δ. Dette viser at (8) holder. Dermed har vi vist i dette tilfellet at M oppfyller kravene til en S(n)-modell. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (iii): Anta S er systemet Π(0). For å vise at M i dette tilfellet er en Π(0)-modell er det nødvendig å vise, i lys av Definisjon 6.4b oppfyller kravet α→βêR → L(α→β)êR. Nå har vi at L(α→β) → L(Lα→Lβ) er et aksiom i Π(0). Det følger at

(13) L(α→β) → L(Lα→Lβ)êΔ.

Anta (α→β)êR. Da har vi L(α→β)êΔ. Fra dette og (13) følger så L(Lα→Lβ)êΔ siden Δ er en sannhetsmengde. I lys av (4) har vi så at (Lα→Lβ)êR. Dette viser at M er en Π(0)-modell i dette tilfellet.

Tilfelle (iv): S er systemet Π(n) der n>0. Siden Π(0) Inkl Π(n) har vi i kraft av det som ble vist i foregående tilfelle at M oppfyller kravet:

(α→β)êR → L(α→β)êR

I lys av Definisjon 6.4b er det derfor tilstrekkelig å vise at

(14) R≠ø →P(n-1)(AxE3) Inkl R

Fra Teorem 4.2 kan vi slutte at alle teoremer i Π(n) er med i Δ. Dette innebærer at Π(n) Inkl Δ. Fra dette følger i sin tur at

(15) P(n)(AxE3) Inkl Δ. Siden

P(n)(AxE3) = P(n-1)(AxE3) U Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n-1)(AxE3))

har vi ved hjelp av (15) at:

(16) Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n-1)(AxE3)) Inkl Δ.

Anta nå at R≠ø og la δ være en vilkårlig formel der (17) δêP(n-1)(AxE3). Siden M oppfyller kravet (4) har vi, siden R≠ø at det finnes γ slik at (18) γêR. Fra (16), (17) og (18) følger at (Lγ →Lδ)êΔ. Fra (4) og (18) følger LγêΔ. Siden Δ er en sannhetsmengde følger fra LγêΔ & (Lγ→Lδ)êΔ at LδêΔ. Dette og (4) impliserer så δêR. Men δ var en vilkårlig formel. Vi har derfor vist at dersom R≠ø så har man P(n-1)(AxE3) Inkl Δ. Dette viser at (14) holder. Dermed har vi vist i dette tilfellet at M oppfyller kravene til en Π(n)-modell. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (v): S er systemt E2. Vi må da vise at M oppfyller kravene til en E2-modell. Siden M i dette tilfelle er en halvsyntaktisk modell og oppfyller kravene (7.1) og (7.2) er det nok å vise at (17) R≠ø → K(AxE2) Inkl R. Anta derfor at (17.1) R≠ø. Nå har vi ifølge Teorem 5.2 at (17.2) K(AxE2) = UN/nêN/(P(n)(AxE2)). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at (17.3) (An)(nêN→ P(n)(AxE2) Inkl R). Anta derfor (17.3) nêN for vilkårlig n. Siden vi har at Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man at alle S-teoremer er med i Δ. Dette innebærer i dette tilfellet at alle E2-teoremer er med i Δ. Vi har derfor at alle E2-aksiomene er med i Δ og derfor: (17.4) K(AxE2) Inkl Δ. Fra dette og (17.2) følger at (17.5) P(n+1)(AxE2) Inkl Δ. Anta nå for vilkårlig α at (17.6) αêP(n)(AxE2). Siden R ifølge (17.1) er ikke tom finnes γêR. Siden M oppfyller (4) har vi da (17.7) LγêΔ. Fra (17.5) og definisjonen av P følger: Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n)(AxE2)) Inkl Δ. Fra dette og (17.6) følger (Lγ →Lα)êΔ. Siden Δ er en sannhetmengde følger fra dette og (17.7) at LαêΔ. herav har vi så αêR. Men α var en vilkårlig formel som oppfylte (17.6). Derfor P(n)(AxE2) Inkl Δ. Dermed har vi vist at (17.3) holder. Dette viser at M i dette tilfellet, der S= E2, oppfyller kravene til en E2-modell.

Tilfelle (vi): S er systemet E3. Vi må da vise at M oppfyller kravene til en E3-modell. Siden M i dette tilfelle er en halvsyntaktisk modell og oppfyller kravene (7.1) og (7.2) er det nok å vise at (18) R≠ø → K(AxE3) Inkl R. Anta derfor at (18.1) R≠ø. Nå har vi ifølge Teorem 5.2 at (18.2) K(AxE3) = UN/nêN/(P(n)(AxE3)). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at (18.3) (An)(nêN→ P(n)(AxE3) Inkl R). Anta derfor (18.3) nêN for vilkårlig n. Siden vi har at Δ er en maksimalt S-konsistent mengde har man at alle S-teoremer er med i Δ. Dette innebærer i dette tilfellet at alle E3-teoremer er med i Δ. Vi har derfor at alle E3-aksiomene er med i Δ og derfor: (18.4) K(AxE3) Inkl Δ. Fra dette og (18.2) følger at (18.5) P(n+1)(AxE2) Inkl Δ. Anta nå for vilkårlig α at (18.6) αêP(n)(AxE3). Siden R ifølge (18.1) er ikke tom finnes γêR. Siden M oppfyller (4) har vi da (18.7) LγêΔ. Fra (18.5) og definisjonen av P følger: Mg((Lγ→Lδ): γêFm(L) & δêP(n)(AxE3)) Inkl Δ. Fra dette og (18.6) følger (Lγ →Lα)êΔ. Siden Δ er en sannhetmengde følger fra dette og (18.7) at LαêΔ. herav har vi så αêR. Men α var en vilkårlig formel som oppfylte (18.6). Derfor P(n)(AxE3) Inkl Δ. Dermed har vi vist at (18.3) holder. Vi må imidlertid også vise at M oppfyller kravet

(18.7) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR. Siden alle E3-teoremene er med i Δ har vi imidlertid at også (18.8) (L(α→β)→L(Lα→Lβ))êΔ. Anta nå for vilkålige α,β at (α→β)êR. Ved hjelp av (4) har vi da L(α→)êΔ. Siden Δ er lukket uner modus ponens følger fra dette og (18.8) at
L(Lα→Lβ)êΔ. Men fra dette og (4) følger i sin tur (Lα→Lβ)êR. Dette viser at (18.7) holder.

Dette viser at M i det tilfellet som vi nå behandler, der S= E3, oppfyller kravene til en E3-modell. Dette viser at satsen holder i dette tilfelle.

Tilfelle (vii): S er systemet S2. I dette tilfelle har vi, siden Δ er en maksimalt S-konsistent mengde, at alle S2-teoremene er med i Δ. Siden S2 er en utvidelse av E2 med aksiomskjemaet L(α→α) innebærer dette at alle E2-teoremene også er med i Δ. Fra det vi viste underbehandlingen av Tilfelle (v) følger det derfor at M i det någjeldende tilfelle oppfyller kravet: (19.1) R≠ø → K(AxE2) Inkl R i tilegg til kravene (7.1) og (7.2) ovenfor. For å vise at M= <Δ,R> er en S2-modell er det derfor tilstrekkelig å vise at R≠ø. Men siden L(α→α) er et aksiomskjema i S2 følger L(α→α)êΔ. Fra dette og (4) følger (α→α)êR og herav R≠ø. Dette viser at om S er systemet S2 oppfyller M alle kravene til en S2-modell. Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Tilfelle (viii): S er systemet S3. I dette tilfelle har vi, siden Δ er en maksimalt S-konsistent mengde, at alle S3-teoremene er med i Δ. Siden S3 er en utvidelse av E med

aksiomskjemaet L(α→α) innebærer dette at alle E3-teoremene også er med i Δ. Fra det vi viste underbehandlingen av Tilfelle (vi) følger det derfor at M i det någjeldende tilfelle oppfyller kravet: (20.1) R≠ø → K(AxE3) Inkl R i tilegg til kravene (7.1) og (7.2) ovenfor, samt kravet
(α→β)êR → (Lα→Lβ)êR. For å vise at M= <Δ,R> er en S3-modell er det derfor tilstrekkelig å vise at R≠ø. Men siden L(α→α) er et aksiomskjema i S3 følger L(α→α)êΔ. Fra dette og (4) følger (α→α)êR og herav R≠ø. Dette viser at om S er systemet S3 oppfyller M alle kravene til en S3-modell. Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Tilfelle (ix): S er systemet S6. For å vise at satsen holder i dette tilfellet er det nok å vise at M oppfyller kravene til en S6-modell når S = S6. En S6-modell er en S2 modell som oppfyller kravet (21) (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR)). Siden S6 er S2 utvidet med aksiomskjemaet MMα er det klart at alle S2-teoremene i dette tilfellet er inkludert i Δ. På basis av det vi viste i under tilfelle (vii) følger det derfor at M oppfyller alle kravene til en S2-modell om S=S6. Det gjenstår derfor bare å vise at (21) holder om S=S6. Siden aksiomskjemaet MMα er med i S6 følger det at MM¬α er et teorem i S6 for enhver formel α. Herav har vi, for enhver formel α, at ¬LLα er et teorem i S6 siden ¬LLα er bevisbart ekvivalent med MM¬α i S6. Siden Δ er maksimalt konsistent følger herav: (Aα)(αêFm(L) → ¬LLαêΔ). Fra dette kan vi slutte: (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêΔ)). Ved hjelp av (4) følger så (21). Dermed har vi vist at M i dette tilfelle oppfyller alle kravene til en S6-modell. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (x): S er systemet S7. For å vise at satsen holder i dette tilfellet er det nok å vise at M oppfyller kravene til en S7-modell når S = S7. En S7-modell er en S3 modell som oppfyller kravet (22) (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR)). Siden S7 er S3 utvidet med aksiomskjemaet MMα er det klart at alle S3-teoremene i dette tilfellet er inkludert i Δ. På basis av det vi viste i under tilfelle (viii) følger det derfor at M oppfyller alle kravene til en S3-modell om S=S7. Det gjenstår derfor bare å vise at (22) holder om S=S7. Siden aksiomskjemaet MMα er med i S7 følger det at MM¬α er et teorem i S7 for enhver formel α. Herav har vi, for enhver formel α, at ¬LLα er et teorem i S7, siden ¬LLα er bevisbart ekvivalent med MM¬α i S7. Siden Δ er maksimalt konsistent følger herav: (Aα)(αêFm(L) → ¬LLαêΔ). Fra dette kan vi slutte: (Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêΔ)). Ved hjelp av (4) følger så (22). Dermed har vi vist at M i dette tilfelle oppfyller alle kravene til en S7-modell. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (xi): S er systemet S8. For å vise at satsen holder i dette tilfellet er det nok å vise at M oppfyller kravene til en S8-modell. En S8-modell er en S3 modell som oppfyller kravet (23) (Aα)(αêFm(L) → MMαêR)). Siden S8 er S3 utvidet med aksiomskjemaet LMMα er det klart at alle S3-teoremene i dette tilfellet er inkludert i Δ. På basis av det vi viste i under tilfelle (viii) følger det derfor at M oppfyller alle kravene til en S3-modell om S=S8. Det gjenstår derfor bare å vise at (23) holder om S=S8. Siden aksiomskjemaet MMα er med i S8 følger siden Δ er maksimalt konsistent at
(Aα)(αêFm(L) → LMMαêΔ). Ved hjelp av (4) følger så (23). Dermed har vi vist at M i dette tilfelle oppfyller alle kravene til en S8-modell. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (xii): S er systemet S2(n). Er n=0 ser man fra Definisjon 5.5 at S(n) er E2. Videre ser man lett fra den samme definisjon at S2(1) rett og slett er S2. Vi har allerede vist satsen i disse to tilfellene. Vi antar derfor at S= S2(n) for n>1. Da har vi at S2(n) er S2 utvidet med aksiomskjemaet L(n)(α→α). Siden enhver S2(n) modell, der n>1, er en S2-modell
M= <Δ,R> som oppfyller kravet: (24) L(n-1)(α→α)êR. Siden S=S2(n) og Δ er en maksimalt S-konsistent mengde følger det at alle teoremene i S2 såvel som S2(n) er med i Δ.

Det følger da fra det vi viste under tilfelle (vii) at <Δ,R> oppfyller alle kravene til en S2 modell. Siden L(n)(α→α), for enhver formel α er et teorem i S2(n) har vi derfor at L(n)(α→α)êΔ. Fra dette og (4) følger at L(n-1)(α→α) er med i R. Dette viser at (24) holder. Satsen holder derfor i det tilfelle at S er S2(n).

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **QED.**

Teorem 7.2 (Fullstendighetsteorem II) Anta S er et av systemene E2, E3, S2, S3, S6, S7 og S8 eller et system i en av rekkene <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>/nêN/. Da har vi for alle αêFm(L) at følgende holder:

S |- α ↔ (AM)(Mê|S| → αêπ;1(M))

Bevis: Gyldighetsdelen av denne satsen har vi vist tidligere. Anta ¬(S|- α). da har vi at {¬α} er en S-konsistent mengde. I henhold til Teorem 7.1 har vi da at det finnes en S-modell M=<Δ,R> slik at {¬α} Inkl Δ. Herav følger at (¬α)êΔ, og derfor, siden Δ er en sannhetsmengde at ¬(αêΔ). Dette innebærer at ¬(αêπ;1(M)). Vi har altså (EM)(Mê|S| & ¬(αêπ;1(M))). Dette viser at fullstendighetsdelen i satsen holder. **QED.**

Teorem 7.3 (Kompakthetsteorem) Anta S er et av systemene E2, E3, S2, S3, S6, S7 og S8 eller et system i en av rekkene <S(n)>/nêN/, <Π(n)>/nêN/ og <S2(n)>/nêN/. Anta Δ er en formelmengde i L. Da har man at Δ Inkl π;(M) for en eller annen S-modell M hvis og bare hvis man har for enhver endelig delmengde Γ av Δ at det finnes en S-modell M' slik at Γ Inkl π;1(M').

Bevis: Vi har i kraft av Teorem 7.1 at en formelmengde Γ er S-konsistent hvis og bare hvis det finnes en S-modell M slik at Γ Inkl π;1(M). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at Δ er S-konsistent hvis og bare hvis enhver endelig delmengde av Δ er S-konsistent. Anta Δ er S-konsistent. Da er det i lys av definisjonen av S-konsistent formelmengde opplagt at hver delmengde, og derfor enhver endelig delmengde av Δ er S-konsistent. Anta på den annen side at enhver endelig delmengde av formelmengden Δ er S-konsistent, men at Δ likevel er S-inkonsistent. Da vil det ikraft av definisjonen av S-konsistens i §4 finnes visse formler β;1,...,β;nêΔ slik at S |- ¬(β;1&...&β;n). Da er det imidlertid åpenbart at {β;1,...β;n} er en endelig og S-inkonsistent delmengde av Δ. Men dette er utelukket. Det følger at Δ må være S-konsistent. **QED.**

Vi skal nevne endel andre forhold. La S være et av de systemene som er nevnt i Teorem 7.1. En formelmengde Δ er lukket under S- konsekvens hvis og bare hvis vi har for vilkårlige formler α,β at dersom αêΔ og (α→β) er et S-teorem så er også βêΔ. Man kan vise følgende i denne forbindelse:

Teorem 7.4 (a) Anta S er et av systemene E2,S2, S2(n) (n>1) eller S6. Anta M=<Δ,R> er en S-modell. Da har man at R er lukket under E2 -konsekvens dersom R≠ø

(b) Anta S er et av systemene E3, S3, S7 eller S8. Anta M=<Δ,R> er en S-modell. Da har man at R er lukket under E3 -konsekvens dersom R≠ø.

Bevis: (a) Anta at S er et av de nevnte systemer og at M=<Δ,R> er en S-modell. Siden alle systemene er utvidelser av E2 følger det at M må oppfylle kravene til en E2 modell. Dette innebærer at dersom R≠ø har vi:

(1) α, (α→β)êR → βêR. (R er lukket under modus ponens.)

(2) K(AxE2) Inkl R

Men (1) og (2) innebærer at R er lukket under modus ponens og inneholder alle de aksiomene som inngår i E2. Vi har derfor at ethvert teorem i E2 da er med i R. Anta αêR og E2 |-α→β. Da har vi både α,(α→β)êR. Fra (1) følger da at βêR.

(b) Beviset for dette punkt blir nesten helt analogt: Anta at S er et av de nevnte systemer og at M=<Δ,R> er en S-modell. Siden alle systemene nevnt under (b) er utvidelser av E3 følger det at M må oppfylle kravene til en E3 modell. Dette innebærer at dersom R≠ø har vi:

(1) (α→β)êR → (Lα→Lβ)êR
(2) K(AxE3) Inkl R
(3) R Inkl Δ

Vi skal vise at R er lukket under modus ponens. Anta (4) αêR og (5) (α→β)êR. Fra det siste og (1) følger (Lα→Lβ)êR. Fra dette og (3) følger (6) (Lα→Lβ)êΔ. Fra (4) følger LαêΔ. Fra dette siste og (6) følger, siden Δ er en sannhetsmengde, at LβêΔ. herav har vi βêR. Dette viser at R er lukket under modus ponens.

Men siden R er lukket under modus ponens og ifølge (3) inneholder alle de aksiomene som inngår i E3 har man at ethvert teorem i E3 er med i R. Anta αêR og E2 |-α→β. Da har vi både α,(α→β)êR. Fra (1) følger da at βêR. **QED.**

Teorem 7.5 (a) Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle E2 -modeller M der Δ Inkl π;1(M) hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i E2

(b) Anta Δ er en formelmengde Anta αêFm(L). Da har vi at αêπ;1(M) for alle E3 -modeller M der Δ Inkl π;1(M) hvis og bare hvis det finnes formler β;1,...,β:nêΔ slik at (β;1& .... & β;n → α) er et teorem i E3

Bevis: Vi gir beviser bare punkt (a) siden beviset for punkt (b) blir helt analogt.

(a) Anta Δ er en formelmengde og at α er en formel i L. Da er det ganske opplagt at kondisjonalen mot venstre i satsen holder. For anta (1) E2 |- (β;1&.... &β;n → α) og (2) β;1,...,β;nêΔ. Anta M er en vilkårlig E2-modell der vi har (3) Δ Inkl π;1(M). Fra (1) og gyldighetsteoremet for E2 følger da (4) (β;1&.... &β;n → α) êπ;1(M). Fra (2) og (3) følger videre (5) β;1,...,;β;n êπ;1(M). Siden π;1(M) er en sannhetsmengde følger fra (4) og (5) at βêπ;1(M). Siden M var en vilkårlig E2-modell har vi vist at αêπ;1(M) for alle E2-modeller M der Δ Inkl π;1(M).

(b) Anta igjen at Δ er en formelmengde i L og at α er en formel i L. Anta at

(1) α êπ;1(M) for enhver F-modell M der vi har Δ Inkl π;1(M).

Vi skal da vise at høyresiden i bikondisjonalen i teoremet holder. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det ikke finnes β;1,...,β;nêΔ der vi har E2 |- (β;1 &...& β;n → α). Da kan det ikke finnes β;1....β;nêΔ slik at E2 |- ¬(β;1&....& β;n & ¬α). Fra definisjonen av E2-konsistent formelmengde følger det da at {β;1,...,β;n,¬α} er en E2-konsistent formelmengde for alle β;1,...,β;nêΔ. Ved hjelp av fullstendighetsteoremet, Teorem 7.1 , kan vi da konkludere med at det for enhver delmengde {β;1,...,β;n} Inkl Δ finnes en E2-modell M' slik at {β;1,...,β;n, ¬α} Inkl π;1(M'). Dette innebærer at for enhver endelig del Γ av ΔU{¬α} finnes det en E2-modell M* slik at Γ Inkl π;1(M*). Da må det etter kompakthetsteoremet, Teorem 7.2 finnes en E2-modell M** slik at ΔU{¬α} Inkl π;1(M**). Da har vi imidlertid at ¬(αêπ;1(M**)) og Δ Inkl π;1(M**) for en eller annen E2-modell M**. Dette strider mot (1). **QED**.

Teorem 7.6 (a) Anta Δ er en formelmengde som er lukket under E2-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver E2-modell M der Δ Inkl π;1(M)
(b) Anta Δ er en formelmengde som er lukket under E3-konsekvens. Anta α er en formel i L. Da har vi at αêΔ hvis og bare hvis αêπ;1(M) for enhver E3-modell M der Δ Inkl π;1(M).

Bevis: Igjen gir vi bare bevis for punkt (a) siden beviset for det andre punktet blir helt analogt. Ad (a): Anta at forutsetningen i teoremet holder. Anta (1) αêΔ . La M være en vilkårlig E2-modell der vi har Δ Inkl π;1(M). Fra dette og (1) følger trivielt at αêπ;1(M). Vi har derfor
αêπ;1(M) for enhver F-modell M der Δ Inkl π;1(M).

(b) Anta igjen at forutsetningene holder. Men anta nå at αêπ;1(M) for enhver E2-modell M der Δ Inkl π;1(M). Fra dette siste følger ved hjelp av Teorem 7.5 at det finnes formler β;1,...,β;nêΔ slik at E2 |- (β;1&....&β;n → α). Siden vi etter forutsetningen har at Δ er lukket under E2-konsekvens følger umiddelbart at αêΔ. **QED.**

§8 Kripke-modeller for de systemene vi har beskrevet.

I dette avsnittet skal vi avgrense den typen av Kripke-modeller som vil bli betraktet i forbindelse med de systemer vi studerer. Vi gjør oppmerksom på at alle de begrepsdannelsene som innføres i dette avsnittet stammer fra Kripke [1],[2].

Definisjon 8.1 (a) Med en modelstruktur for L forstås et triple <G,K,R> der K er en mengde, G et element i K og hvor R er en relasjon over K. (b) Med en verditilordning assosiert med modellstrukturen <G,K,R> forstås en funksjon φ som tilordner enhver setningsvariabel i L en delmengde av K. (c) Med en Kripke-modell for L forstår vi et kvadruppel <φ,G,K,R> der de tre siste komponentene utgjør en modellstruktur for L og hvor φ er en verditilordning assosiert med modellstrukturen <G,K,R>.

Er M= <φ,G,K,R> en Kripke-modell for L, kalles φ for verditilordningen i M. Komponenten G kalles for den aktuelle verden i modellen M, mengden K for mengden av de mulige verdener i M og endelig kalles R for alternativrelasjonen i M. Er w en verden i K kalles den *normal* om man har wRw.

Vi definerer hva som menes med at en formel α i L er sann i verdenen w i Kripke-modellen M, i symboler "<M,w> ⊨ α" ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.2 La M= <φ,G,K,R> være en Kripke-modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

(ii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ ¬α ↔ ¬(<M,w> ⊨ α)

(iii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(iv) Er α en formel i L setter vi:

<M,w> ⊨ Lα ↔ wRw &(Aw')(w'êK & wRw' → <M,w'> ⊨ α)

Vi trenger noen begreper som defineres av Kripke. Anta M=<φ,G,K,R> er en Kripke-modell.

Definisjon 8.3 Anta M=<φ,G,K,R> er en Kripke-modell for L.

(a) Vi definerer da en relasjon Q som er inkludert i KxN, der N er mengden av de naturlige tall, på følgende måte <w,n>êQ hvis og bare hvis vi enten har at n=0 og w=G eller vi har at det finnes x;0,....,x;nêK der (i) x;0=G & x;n=w & (ii) (Aj)(0=< j<n → x;jRx;(j+1)).

(b) Er w et element i K defineres *dybden til w* som det minste tallet n slik at wQn om det finnes et slikt tall. Hvis det ikke finnes noen slikt naturlig tall n, sies dybden til w å være uendelig.

Etter disse forberedelsene kan vi avgrense de forskjellige Kripke-modellene som svarer til de systemene vi har arbeidet med tidligere.

Definisjon 8.4 (a) Med en *Kripke E2-modell* forstås en Kripke-modell M=<φ;G,K,R> der R er "kvasi-refleksiv", det vil si der R oppfyller det følgende krav:

(i) (Ax)(Ay)(x,yêK → (xRy → xRx))

(b) Med en *Kripke E3-modell* forstås en Kripke E2-modell M=<φ;G,K,R> der R er transitiv, det vil si der vi har:

(ii) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK → (xRy &yRz → xRz))

(c) Med en *Kripke S2 (S3) -modell* forstås en Kripke E2 (E3) -modell M=<φ,G,K,R> der G er et normalt element i K

(d) Med en *Kripke S2(n)-modell*, der n>1, forstås en Kripke S2-modell M=<φ,G,K,R> der enhver verden wêK som har dybde < n er normal.

(e) Med en *Kripke S6 (S7)-modell* forstås en Kripke S2(S3)-modell M=<φ,G,K,R> der det finnes en unormal verden w, som er med i K og som har en dybde lik 1.

(f) Med en Kripke S8-modell forstås en Kripke S3-modell M=<φ,G,K,R> der vi har at følgende gjelder:

(iii) (Ax)(xêK & xRx → (Ey)(yêK xRy & ¬(yRy)))

Anta S er et av systemene E2,E3, S2, S2(n) (n>1), S3, S6, S7 eller S8. Vi sier da at en formel α i L er *Kripke S-gyldig* hvis og bare hvis man har for enhver Kripke S-modell M= <φ,G,K,R> at <M,G> ⊨ α

Man har at følgende gyldighetsteorem holder:

Teorem 8.1 Anta S er et av systemene E2,E3, S2, S2(n) (n>1), S3, S6, S7 eller S8. Anta α er en formel i L. Er da α et teorem i S er α Kripke S-gyldig.

§9 Om sammenhengen mellom Kripke-modeller og halvsyntaktiske modeller.

Teorem 9.1 La S være et av systemene E2, S2, S2(n) (n>1) eller S6. Anta mê|S|. Definer en relasjon μ ved å sette:

μ = Mg(<m,m'>: m,m'ê|E2| & π;2(m)≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m'))

Da har vi for alle αêFm(L):

Lαêπ;1(m) ↔ (mμm & (Am')(m'ê|E2| & mμm' → αêπ;1(m')))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Anta videre at α er en vilkårlig formel i L.
(a) Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta (1) Lαêπ;1(m). Siden m er en E2-modell har vi at m er en halvsyntaktisk modell, og derfor at (1.1) Lαêπ;1(m) ↔ αêπ;2(m). Fra dette og (1) følger αêπ;2(m), og derfor at (2) π;2(m)≠ø. Siden mê|S| er m en E2-modell. Fra definisjonen av E2-modell ser man da at (3) π;2(m) Inkl π;1(m). Fra (2), (3) og definisjonen av µ følger at
(4) mµm. Anta (5) m'ê|E2| & mµm' for vilkårlig m'. Fra definisjonen av µ, gitt i satsen, følger da (6) π;2(m) Inkl π;1(m'). Fra (1) og (1.1) følger αêπ;2(m). Dette og (6) impliserer at
αêπ;1(m'). Sidem m' var vilkårlig element slik at (5) følger

(Am')(m'ê|E2| & mµm' → αêπ;1(m')). Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) mµm & (Am')(m'ê|E2| & mµm' → αêπ;1(m')) Fra den første konjunkten i (6) følger at (7) π;2(m)≠ø i lys av definisjonen av µ som er gitt i satsen. Den andre konjunkten i (6) impliserer: (Am')(m'ê|E2| & π;2(m) ≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m')). I lys av (7) impliserer dette: (8) (Am')(m'ê|E2|& π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m')). Siden m er en E2-modell og π;2(m) ≠ø er (9) π;2(m) lukket under E2-konsevens. Fra dette, (8) og det første punktet i Teorem 7.6 kan man slutte at αêπ;2(m). Fra dette følger så, siden m oppfyller kravet (1.1) at Lαêπ;1(m). Dette viser at kondisjonalen mot venstre holder. **QED.**

Teorem 9.2 La S være et av systemene E3, S3, S7 eller S8. Anta
mê|S|. Definer en relasjon µ ved å sette:
µ = Mg(<m,m'>: m,m'ê|E3| & π;2(m)≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m'))
Da har vi for alle αêFm(L):
Lαêπ;1(m) ↔ (mµm & (Am')(m'ê|E3| & mµm' → αêπ;1(m)))

Bevis: Beviset blir som for Teorem 9.1. For tydelighetens skyld gir vi et detaljert bevis:
(a) Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta (1) Lαêπ;1(m). Siden m er en E3-modell har vi at m er en halvsyntaktisk modell, og derfor at (1.1) Lαêπ;1(m) ↔ αêπ;2(m). Fra dette og (1) følger αêπ;2(m), og derfor at (2) π;2(m)≠ø. Siden mê|S| er m en E3-modell. Fra definisjonen av E3-modell ser man da at (3) π;2(m) Inkl π;1(m). Fra (2), (3) og definisjonen av µ følger at
(4) mµm. Anta (5) m'ê|E3| & mµm' for vilkårlig m'. Fra definisjonen av µ, gitt i satsen, følger da (6) π;2(m) Inkl π;1(m'). Fra (1) og (1.1) følger αêπ;2(m). Dette og (6) impliserer at
αêπ;1(m'). Siden m' var vilkårlig element slik at (5) følger

(Am')(m'ê|E3| & mµm' → αêπ;1(m')). Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder.

(b) Vi tar så for oss kondisjonalen mot venstre. Anta

(6) mµm & (Am')(m'ê|E3| & mµm' → αêπ;1(m')) Fra den første konjunkten i (6) følger at (7) π;2(m)≠ø i lys av definisjonen av µ som er gitt i satsen. Den andre konjunkten i (6) impliserer: (Am')(m'ê|E3| & π;2(m) ≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m')). I lys av (7) impliserer dette: (8) (Am')(m'ê|E2|& π;2(m) Inkl π;1(m') → αêπ;1(m')). Siden m er en E2-modell og π;2(m) ≠ø er (9) π;2(m) lukket under E2-konsevens. Fra dette, (8) og det andre punktet i Teorem 7.6 kan man slutte at αêπ;2(m). Fra dette følger så, siden m oppfyller kravet (1.1) at Lαêπ;1(m). Dette viser at kondisjonalen mot venstre holder. **QED.**

Teorem 9.3 La S være et av systemene E2, S2, S2(n) (n>1) eller S6. Anta mê|S|. Definer en relasjon μ ved å sette:

(i) μ = Mg(<m',m''>: m',m''ê|E2| & π;2(m')≠ø & π;2(m') Inkl π;1(m''))

La Γ(m) være den minste mengden X Inkl |E2| som inneholder m og som er lukket under μ. La μ* være relasjonen μ begrenset til Γ(m).

Definer om p er en setningsvariabel funksjonen φ ved å sette:

(ii) φ(p) = Mg(m': m'êΓ(m) & pêπ;1(m'))

Sett per definisjon M=<φ,m,Γ(m), μ*>. Da gjelder følgende:

(a) M er en Kripke S-modell

(b) Er m' et vilkårlig element i Γ(m) og er α en vilkårlig formel i L har man:
<M,m'> ╞ α ↔ αêπ;1(m')

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.

Ad (a): Vi må vise at M er en S-modell om S er et av systemene nevnt i den første forutsetningen, med andre ord om S er et av systemene E2, S2, S2(n) (n>1) eller S6. Det skulle være umiddelbart klart at mêΓ(m) og at μ* er en relasjon over Γ(m). Strukturen <m,Γ(m),μ*> er derfor åpenbart en modellstruktur i henhold til Definisjon 8.1. Videre skulle det være klart at φ oppfyller kravene til en verditilordning assosiert med modellstrukturen <m,Γ(m),μ*> slik "verditilordning" er definert i Definisjon 8.1. Det følger derfor at M=<φ,m, Γ(m),μ*> er en Kripke-modell for L. Det gjenstår å vise at M er en Kripke S-modell ettersom S er et av de systemene som er nevnt i den første forutsetningen. Vi skiller derfor mellom fire tilfelle:

Tilfelle (i): S er systemet E2. Vi må da vise at modellstrukturen <m,Γ(m),μ*> oppfyller kravene E2-modell. Siden vi allerede har vist at M er en Kripke-modell er det derfor, i lys av Definisjon 8.4a, bare nødvendig å vise at μ* er "kvasi-refleksiv" over Γ(m). Anta derfor
(1.1) m;1, m;2êΓ(m) og (1.2) m;1 μ* m;2. Det følger da at m;1μ m;2, og derfor i lys av definsjonen av μ at π;2(m1)≠ø & π;2(m1) Inkl π;1(m;2). Men siden m;1, m;2eΓ(m) er m;1,m;2 E2-modeller og oppfyller kravene til sådanne. Dette innebærer at
π;2(m;1) Inkl π;1(m;1) og derfor at m;1μm;1. Men siden m;1êΓ(m) følger da m;1μ*m;1. Dette viser at μ* er kvasirefleksiv. I tilfellet S er systemet E2 har vi følgelig at M er en Kripke E2-modell.

Tilfelle (ii): S er systemet S2. Siden alle S2-modeller er E2-modeller følger det at vi også i dette tilfelle kan vise at μ* er kvasirefleksiv. Dette skjer på samme måte som under tilfelle (i). Det eneste vi må vise for å vise at M i dette tilfellet er en S2-modell er, i henhold til Definisjon 8.4c at m er normal. Vi må med andre ord vise at vi har: (2.1) mμ*m. Siden m, ifølge den andre forutsetningen i satsen, i dette tilfellet er med i |S2|, har vi per definisjon av "S2-modell" at π;2(m)≠ø. Men siden enhver S2-modell er en E2-modell følger også at π;2(m) Inkl π;1(m). Fra disse to forhold og definisjonen av μ følger mμm. Herav har vi siden mêΓ(m) at mμ*m. Det følger at m er et normalt element. Dette viser at M i dette tilfellet er en Kripke S2-modell.

Tilfelle (iii): S er systemet S(n) der n>1. Siden alle S(n) modeller (n>1) er S2-modeller og derfor E2-modeller følger det at vi kan vise, som i de foregående tilfelle at, at M oppfyller kravene til en S2-modell. Vi må imidlertid nå vise at M oppfyller kravet til en S2(n)-modell.
I henhold til Definisjon 8.4d innebærer dette at vi må vise at ethvert element i Γ(m) som har dybde < n er et normalt element. Anta m' er et element i Γ(m) som har dybde <n. Vi vil vise at m' er et normalt element. La oss anta at dybden er j, der j<n. Ved hjelp av definisjonen av "dybde", Definisjon 8.3 kan vi da slutte at det finnes (3.1) x;0,....,x;j êΓ(m) slik at (3.2)

x;0=m & x;j=m' og der vi har

(3.3) (Ak)(0=<k<j → x;kμ*x;(k+1))

Nå har vi at mê|S| og derfor i dette tilfellet at mê|S2(n)| (n>1). Fra definisjonen av S2(n)-modell som vi har gitt tidligere følger det da at (3.4) L(n-1)(α→α)êπ;2(m) Dette innebærer i lys av (3.2) at (3.5) L(n-1)(α→α)êπ;2(x;0). Fra (3.3) og definisjonen av μ* følger:

(3.6) (Ak)(0=< k < j → π;2(x;k) Inkl π;1(x;(k+1))) Fra dette og (3.5) følger:

(3.7) (Ak)(0=< k =<j → π;2(x;k)≠ø) Siden vi har

(Am')(m'êΓ(m) & π;2(m')≠ø → m'μ*m') følger det fra (3.7), når man setter k=j, at x;j=m' er et normalt element i M Dette viser at M i dette tilfelle oppfyller alle kravene som stilles til en Kripke S2(m)-modell.

Tilfelle (iv): S er i dette tilfellet systemet S6. Vi må i dette tilfelle, i lys av Definisjon 8.4d vise at det finnes en m'êΓ(m) med dybde 1 der vi har at m' er unormal. Anta derfor for reduktio ad absurdum at alle m' med dypde 1 er normale. Dette impliserer ved hjelp av Definisjon 8.3 og definisjonen av normal verden at (4.1) (Am')(mμ*m' → m'μ*m'). Men fra m'μ*m' og definisjonen av μ* og μ kan man slutte π;2(m')≠ø. (4.1) impliserer derfor (4.2) (Am')(mμ*m' → π;2(m')≠ø) Nå har vi at dersom mμ*m' er m' en E2-modell. Er da π;2(m')≠ø har vi at (α→α)êπ;2(m'). Fra (4.2) kan man derfor slutte

(4.3) (Am')(mμ*m' → L(α→α)êπ;1(m')). Nå har man at m er en S6-modell og derfor en S2-modell. Det følger at m er normal og derfor at mμ*m. Fra dette, (4.3) og Teorem 9.1 kan man slutte: (4.4) LL(α→α)êπ;1(m). Men m er en S6-modell. Da har vi ved hjelp av definisjonen av S6-modell at (¬LLβ)êπ;1(m) for alle formler β. Siden π;1(m) er en sannhetsmengde strider dette åpenbart mot (4.4). Siden m er en S6-modell er det også åpenbart at den er en S2-modell. Det følger derfor at M oppfyller alle kravene som stilles til en Kripke S6-modell.

Ad (b): Vi skal vise at dersom m' er et vilkårlig element i Γ(m) og α er en vilkårlig formel i L har man: <M,m'> ⊨ α ↔ αêπ;1(m'). Dette gjøres ved induksjon på lengden av α.

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,m'> ⊨ α ↔ <M,m'> ⊨ p ↔ m'êφ(p) ↔ pêπ;1(w)

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,m'> ⊨ ¬β ↔ ¬(<M,m'> ⊨ β)
↔ ¬(βêπ;1(m')) (Her benytter vi induksjonshypotesen)
↔ (¬β)êπ;1(m') (Siden π;1(m') er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(m')

(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:

<M,m'> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,m'> ⊨ β → <M,m'> ⊨ γ)
↔ (βêπ;1(m') → γêπ;1(m')) (Etter induksjonshypotese)
↔ (β→γ)êπ;1(m') (π;1(m') er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(m')

(iv) Er α = Lβ for en eller annen formel β har vi:

<M,m'> ⊨ Lβ ↔ m'μ*m' &(Am'')(m''êK & m' μ* m'' → <M,m''> ⊨ α)
↔ (Am'')(m''êΓ(m) & m'μ* m'' →αêπ;1(m'')

Men i ved hjelp av Teorem 9.1 har vi:

(Am'')(m''êΓ(m) & m'μ* m'' → αêπ;1(m'')) & m'μ*m' ↔ Lαêπ;1(m')

Det følger at <M,m'> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(m').

Dette viser at punkt (b) i teoremet holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 9.4 La S være et av systemene E3, S3, S7 eller S8. Anta mê|S|. Definer en relasjon μ ved å sette:

(i) μ = Mg(<m',m''>: m',m''ê|E3| & π;2(m')≠ø & π;2(m') Inkl π;1(m''))

La Γ(m) være den minste mengden X Inkl |E3| som inneholder m og som er lukket under μ. La μ* være relasjonen μ begrenset til Γ(m).

Definer om p er en setningsvariabel funksjonen φ ved å sette:

(ii) φ(p) = Mg(m': m'êΓ(m) & pêπ;1(m'))

Sett per definisjon M=<φ,m,Γ(m), μ*>. Da gjelder følgende:

(a) M er en Kripke S-modell

(b) Er m' et vilkårlig element i Γ(m) og er α en vilkårlig formel i L har man:
<M,m'> ╞ α ↔ αêπ;1(m')

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.

Ad (a): Vi må vise at M er en S-modell om S er et av systemene nevnt i den første forutsetningen, med andre ord om S er et av systemene E3, S3, S7 eller S8. Det skulle være umiddelbart klart at mêΓ(m) og at μ* er en relasjon over Γ(m). Strukturen <m,Γ(m),μ*> er derfor åpenbart en modellstruktur i henhold til Definisjon 8.1. Videre skulle det være klart at φ oppfyller kravene til en verditilordning assosiert med modellstrukturen <m,Γ(m),μ*> slik "verditilordning" er definert i Definisjon 8.1. Det følger derfor at M=<φ,m, Γ(m),μ*> er en Kripke-modell for L. Det gjenstår å vise at M er en Kripke S-modell ettersom S er et av de systemene som er nevnt i den første forutsetningen. Vi skiller derfor mellom fire tilfelle:

Tilfelle (i): S er systemet E3. Vi må da vise at modellstrukturen <m,Γ(m),μ*> oppfyller kravene E3-modell. Siden vi allerede har vist at M er en Kripke-modell er det derfor, i lys av Definisjon 8.4a, bare nødvendig å vise at μ* er "kvasi-refleksiv" over Γ(m). Anta derfor
(1.1) m;1, m;2êΓ(m) og (1.2) m;1 μ* m;2. Det følger da at m;1μ m;2, og derfor i lys av definsjonen av μ at π;2(m1)≠ø & π;2(m1) Inkl π;1(m;2). Men siden m;1, m;2eΓ(m) er m;1,m;2 E3-modeller og oppfyller kravene til sådanne. Dette innebærer at π;2(m;1) Inkl π;1(m;1) og derfor at m;1μm;1. Men siden m;1êΓ(m) følger da m;1μ*m;1. Dette viser at μ* er kvasirefleksiv.

For å vise at M er en E3-modell er det imidlertid også nødvendig å vise at μ* er transitiv. Det må altså gis bevis for:

(1.3) m',m'',m''' êΓ(m) → m'μ*m'' & m''μ*m''' → m'μ*m'''. Dette er siden m',m'',m''' êΓ(m) ekvivalent med:

(1.4) m',m'',m''' êΓ(m) → m'μm'' & m''μm''' → m'μm'''.

Anta derfor (1.5) m',m'',m''' êΓ(m) og (1.6) m'μm'' & m''μm'''. Fra det siste følger (1.7) π;2(m') ≠ ø & π;2(m') Inkl π;1(m'') & π;2(m'') Inkl π;1(m''').
Det vil være nok å vise m'μm'''. Anta derfor for reduktio ad absurdum at (1.8) ¬(m'μm'''). Ved hjelp av definisjonen av μ følger da

(1.9) π;2(m')≠ø → ¬(π;2(m') Inkl π;1(m''')). Fra dette og den første konjunkten i (1.7) følger (1.10) Fra dette følger at det finnes en formel α slik at

(1.11) αêπ;2(m') & ¬(αêπ;1(m'''). Fra den andre konjunkten i (1.6) følger π;2(m'')≠ø og derfor at det finnes en formel γ slik at (1.12) γêπ;2(m''). Fra den første konjunkten i (1.11) følger det selvfølgelig at π;2(m') er ikke-tom. Fra dette og Teorem 7.4 følger det at π;2(m') er lukket under E3-konsekvens. Siden (γ→α) åpenbart er en E3-konsekvens av α har vi ved hjelp av den første konjunkten i (1.11) at (γ→α)êπ;2(m'). Fra dette følger (1.13) L(γ→α)êπ;1(m'). Men alle E3-aksiomene er E3-gyldige og derfor med i π;1(m'). Da har vi

(L(γ→α) → L(Lγ →Lα))êπ;1(m'). Dette og (1.13) impliserer L(Lγ→Lα)êπ;1(m'). Dette impliserer at (Lγ→Lα)êπ;2(m'). Fra dette den andre konjunkten i (1.7) følger: (1.14) (Lγ→Lα)êπ;1(m''). Fra (1.12) følger Lγêπ;1(m'') som sammen med (1.14) gir oss Lαêπ;1(m''). Men fra dette følger αê π;2(m''). Dette og den tredje konjunkten i (1.7) impliserer at αêπ;1(m'''). Men dette strider åpenbart mot (1.11). Det følger at (1.8) er gal og derfor at µ og dermed µ* er en transitiv relasjon over Γ(m). Dette viser at M oppfyller alle kravene til en Kripke E3-modell og viser at punkt (a) holder i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): S er systemet S3. Vi må i dette tilfelle vise at M oppfyller kravene til en Kripke S3-modell. Men en Kripke S3-modell er en Kripke E3-modell hvor den utpekte verden er normal. At M i dette tilfellet oppfyller kravene til en Kripke E3-modell vises nøyaktig som i forrige tilfelle. Det eneste vi nå må bevise er at m er normal, det vil si mµ*m Siden m, ifølge den andre forutsetningen i satsen, i dette tilfellet er med i |S3|, har vi per definisjon av "S3-modell" at π;2(m)≠ø. Men siden enhver S3-modell er en E3-modell følger også at π;2(m) Inkl π;1(m). Fra disse to forhold og definisjonen av µ følger mµm. Herav har vi siden mêΓ(m) at mµ*m. Det følger at m er et normalt element. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at S i dette tilfelle er en Kripke S-modell.

Tilfelle (iii): S er i dette tilfellet systemet S7. Vi må , i lys av Definisjon 8.4e vise at det finnes en m'êΓ(m) med dybde 1 der vi har at m' er unormal. Anta derfor for reduktio ad absurdum at alle m' med dypde 1 er normale. Dette impliserer ved hjelp av Definisjon 8.3 og definisjonen av normal verden at (3.1) (Am')(mµ*m' → m'µ*m'). Men fra m'µ*m' og definisjonen av µ* og µ kan man slutte π;2(m')≠ø. (3.1) impliserer derfor

(3.2) (Am')(mµ*m' → π;2(m')≠ø) Nå har vi at dersom mµ*m' er m' en E3-modell. Er da π;2(m')≠ø har vi at (α→α)êπ;2(m'). Fra (3.2) kan man derfor slutte

(3.3) (Am')(mµ*m' → L(α→α)êπ;1(m')). Nå har man at m er en S7-modell og derfor en S3-modell. Det følger at m er normal og derfor at mµ*m. Fra dette, (3.3) og Teorem 9.2 kan man slutte: (3.4) LL(α→α)êπ;1(m). Men m er en S7-modell. Da har vi ved hjelp av definisjonen av S7-modell at (¬LLβ)êπ;1(m) for alle formler β. Siden π;1(m) er en sannhetsmengde strider dette åpenbart mot (3.4). Siden m er en S7-modell er det også åpenbart at den er en S3-modell. Det følger derfor at M oppfyller alle kravene som stilles til en Kripke S7-modell.

Tilfelle (iv): S er systemet S8. Vi må i dette tilfellet vise at M oppfyller aller kravene til en S3-modell og at den dessuten oppfyller kravet:

(4.1) m'êΓ(m) & m'µ*m' → (Em'')(m''êΓ(m) & m'µ*m'' & ¬(m''µ*m''))

Siden enhver S8-modell er en S3-modell kan man som under de foregående tilfeller vise at M også i dette tilfellet oppfyller kravene til en Kripke S3-modell. Det gjenstår derfor bare å vise at (4.1) holder. (4.1) er ekvivalent med:

(4.2) m'êΓ(m) & m'µm' → (Em'')(m''êΓ(m) & m'µm'' & ¬(m''µm''))

Anta (4.3) m'êΓ(m) & m'µm'. Vi har at mê|S8|, men det innebærer ikke uten videre at m' er en S8-modell. Men siden m'êΓ(m) og Γ(m) er den minste mengden av E3-modeller som inneholder m og som er lukket under µ følger det, siden µ er transitiv at (4.4) mµm'. Siden m er en S8 modell har vi LMM¬αêπ;1(m) eller ekvivalent L¬LLαêπ;1(m) for alle formler α. Dette impliserer at (¬LL(α→α))êπ;2(m). Siden mµm' følger π;2(m) Inkl π;1(m'). Vi har derfor at (4.5) (¬LL(α→α))êπ;1(m').

Anta nå for reduktio ad absurdum at (4.6) ¬ (Em'')(m''êΓ(m) & m'µm'' & ¬(m''µm'')). Dette impliserer: (4.7) (Am'')(m''êΓ(m) & m'µm'' → m''µm'') Men fra m''µm'' og definisjonen av µ kan man slutte π;2(m'')≠ø. (4.7) impliserer derfor

(4.8) (Am'')(m'µm'' → π;2(m'')≠ø) Nå har vi at dersom m'µm'' er m'' en E3-modell.

Er da π;2(m")≠ø har vi at (α→α)êπ;2(m"). Fra (4.8) kan man derfor slutte

(4.9) (Am")(m'µm" → L(α→α)êπ;1(m")). Nå har man at m' er en S3-modell siden m'µm'. Fra dette, (4.9) og Teorem 9.2 kan man slutte: (4.10) LL(α→α)êπ;1(m'). Men dette strider åpenbart mot (4.5). Dette viser at (4.1) holder. Vi har dermet vist at M oppfyller alle kravene til en S8-modell.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Dette punktet i satsen bevises nøyaktig som punkt (b) i Teorem 9.3. Ved induksjonstrinnet for Lα må man imidlertid henvise til Teorem 9.2 istedet for til Teorem 9.1. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi kan nå gi bevis for vårt hovedresultat når det gjelder forholdet mellom halvsyntaktiske modeller og Kripke-modeller.

Teorem 9.5 Anta S er et av systemene E2,E3, S2, S2(n) (n>1), S3, S6, S7 eller S8. Anta α er en vilkårlig formel i L. Er da α Kripke S-gyldig er α også S-gyldig

Bevis: Anta S er et av de nevnte systemer, α en formel i L og at α er Kripke S-gyldig. Anta nå at m er en vilkårlig S-modell. Alt ettersom S er et E2-basert eller E3-basert system konstruer en Kripke S-modell M= <φ,m, Γ(m),µ*> som i Teorem 9.4 eller Teorem 9.5 med utgangspunkt i m. Da har vi ifølge begge teoremer at (1) <M,m> ⊨ α ↔ αêπ;1(m). Men siden α er Kripke S-gyldig har vi <M,m> ⊨ α. Fra dette følger αêπ;1(m). Men m var en vilkårlig S-modell. deet følger at α er S-gyldig. **QED**.

Siden ethvert S-teorem ifølge Teorem 8.1 er Kripke S-gyldig og enhver S-gyldig formel er et S-teorem følger det ved hjelp av Teorem 9.5 at enhver formel er Kripke S-gyldig hvis og bare hvis den er S-gyldig.

Dette siste, at Kripke S-gyldighet er ekvivalent med S-gyldighet, kan også innses på en litt annen måte enn den som ble antydet ovenfor. Man har at den følgende sats, som vi ikke skal gi noe detaljert bevis for, holder:

Teorem 9.6 Anta S er et av systemene E2,E3, S2, S2(n) (n>1), S3, S6, S7 eller S8. Anta M= <φ,G,K,R> er en Kripke S-modell. Definer: Δ = Mg(α: αêFm(L) & <M,G> ⊨ α). Definer videre formelmengden Γ ved: Γ = Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ). Da er m=<Δ,Γ> en S-modell og vi har : (Aα)(αêFm(L) → (<M,G> ⊨α ↔ αêπ;1(m)))

Skal man bevise dette må man bruke gyldighetsteoremet, Teorem 8.1. Dette impliserer at alle S-teoremene er med i Δ. Videre er det lett å verifisere at Δ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Tilslutt må man vise at Γ oppfyller de kravene som stilles til en S-modell. For alle systemene det her dreier seg om er dette relativt likefrem.

Fra Teorem 9.6 følger:

Teorem 9.7 Anta S er et av systemene E2,E3, S2, S2(n) (n>1), S3, S6, S7 eller S8. Anta α er en vilkårlig formel i L. Er da α S-gyldig er α også Kripke S-gyldig

Bevis: Anta α er S-gyldig. Dette innebærer at (1) (AM)(Mê|S| → αêπ;1(M)). La M=<φ,G,K,R> være en vilkårlig Kripke S-modell. Konstruer en S-modell m=<Δ,Γ> slik som i

Teorem 9.6. Da følger fra det samme teorem at

(2) (Aα)(αêFm(L) → (<M,G> ⊨α ↔ αêπ;1(m)))

Siden m er en S-modell følger fra (1) at αêπ;1(m). Dette og (2) impliserer <M,G> ⊨α. Men M var en vilkårlig Kripke S-modell. Det følger at α er Kripke S-gyldig. **QED**.

§10 Systemene S3.5 og S9.

Systemene S3.5 og S9 behandles her separat fordi de har en Kripke-semantikk som avviker noe fra den som ble presentert i §8 I denne paragrafen vil disse to systemene bli undersøkt. man får systemet 3.5 ved å legge til aksiomskjemaet Mα→ LMα til S3. Systemet S9 fremkommer så fra systemet S3.5 ved å ytterligere legge til aksiomskjemaet MMα. La oss først gi en presis definisjon av de to systemene.

Definisjon 10.1
(a) Vi setter
AxE3+ = AxE3 U Mg(¬Lα→L¬Lα: αêFm(L))
Ax3.5 = K(AxE3+) U Mg(L(α→α): αêFm(L))
(b) Systemet S3.5 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
(i) Ax3.5 Inkl X
(ii) X er lukket under modus ponens
(c) Systemet S9 er den minste formelmengden X som oppfyller følgende krav:
(i) Ax3.5U Mg(MMα: αêFm(L)) Inkl X
(ii) X er lukket under modus ponens

Vi kan definere to klasser av halvsyntaktiske modeller som svarer til disse systemene.

Definisjon 10.2 (a) Med en *S3.5-modell* forstås en halv syntaktisk modell M= <Δ,R> som oppfyller det følgende krav:
(1) K(AxE3+) Inkl R
(2) αêR & (α→β)êR → βêR
(3) R Inkl Δ
(4) (Aα)(αêFm(L) → (¬Lα)êΔ → (¬Lα)êR)
(b) Med en *S9-modell* forstås en S3.5-modell M=<Δ,R> som oppfyller det følgende krav:
(Aα)(αêFm(L) → ¬(LαêR))

Man ser på basis av denne definisjonen og den vi tidligere har gitt av en S3-modell at alle S3.5-modeller er S3-modeller. Dette er fordi man har K(AxE3) Inkl K(AxE3+)

En formel α er S3.5 (S9)-gyldig hvis og bare hvis vi har for enhver S3.5 (S9)-modell M at αêπ;1(M). På basis av de gyldighetsteoremene vi har vist tidligere er det en enkel sak å vise at alle teoremene i S3.5 (S9) er S3.5 (S9)-gyldige. Vi går derfor ikke detaljert gjennom disse bevisene. Det er også lett å vise at S3.5 og S9 er fullstendige med hensyn på S3.5- og S9-gyldighet. Heller ikke i denne forbindelse gir vi noe detaljert bevis. Man har altså:

Teorem 10.1 (a) Anta α er en formel i L. Da har man at dersom α er et teorem i S3.5 (S9) så er α S3.5 (S9)-gyldig.
(b) Er Γ en S3.5 (S9)-konsistent formelmengde i L finnes det en S3.5 (S9)-modell M slik at Γ Inkl π;1(M)

La oss nå avgrense den typen Kripke-modeller som vil bli brukt i forbindelse med disse systemene.

Definisjon 10.3 (a) Med en *Kripke S3.5-modell* forstås et triple M=<φ,K,N> der komponentene oppfyller de følgende krav: (i) K er en mengde der N er inkludert i K og hvor N er ikke-tom. (ii) φ er en funksjon som til enhver setningsvariabel p i L tilordner en delmengde av K.
(b) Med en *Kripke S9-modell* forstås en Kripke S3.5-modell M=<φ,K,N> der N er strengt inkludert i K, det vil si der K-N≠ø.

Definisjon 10.4 La M= <φ,K,N> være en Kripke S3.5(S9) -modell for L, w et element i K og α en formel i L. Da defineres "α er sann i verdenen w i modellen M", i symboler "<M,w> ⊨ α" induktivt på lengden av α slik:

(i) Er p en setningsvariabel i L setter vi:
<M,w> ⊨ p ↔ wêφ(p)

(ii) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ ¬α ↔ ¬(<M,w> ⊨ α)

(iii) Er α,β formler i L setter vi:
<M,w> ⊨ (α → β) ↔ (<M,w> ⊨ α → <M,w> ⊨ β)

(iv) Er α en formel i L setter vi:
<M,w> ⊨ Lα ↔ wêN & (Aw)(wêK → <M,w> ⊨ α)

Man ser fra denne definisjonen at sannhetsverdien til formler av typen Lα evalueres på en litt annen måte enn i forbindlse med den typen Kripke-modeller vi betraktet i §8.

En formel α i L sies å være Kripke S3.5(S9)-gyldig hvis og bare hvis man har for enhver Kripke S3.5(S9)-modell M=<φ,K,N> at (Aw)(wêN → <M,w> ⊨ α) Man kan lett vise at alle teoremer i S3.5 (S9) er Kripke S3.5 (S9)-gyldige. Vi utelater beviset siden det er dreier seg om en ren rutineøvelse.

Vi skal nå undersøke sammenhengen mellom S3.5 (S9)-modeller og Kripke S3.5 (S9)-modeller. Mengden av alle S3.5 (S9)-modeller betegnes med |3.5| (|S9|). Relasjonen μ definerer vi på samme måte som før, nemlig ved:

μ = Mg(<m,m'>: m,m'ê|E3| & π;2(m)≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m'))

Er mê|E3| definerer vi, som før, Γ(m) som den minste mengden X inkl |E3| som oppfyller de følgende krav:

(i) mêX
(ii) (Am)(Am')(mêX & mμm' → m'êX)

I det følgende har vi bruk for den følgende sats som er på det nærmeste identisk med Teorem 9.2.

Teorem 10.2 La S være et av systemene S3.5 eller S9. Anta mê|S|. Definer en relasjon μ ved å sette:

μ = Mg(<m,m'>: m,m'ê|E3| & π;2(m)≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m'))

Da har vi for alle αêFm(L):

Lαêπ;1(m) ↔ (mμm & (Am')(m'ê|E3| & mμm' → αêπ;1(m)))

Bevis: Beviset er identisk med det som er gitt for Teorem 9.2 **QED.**

Det er også hensiktsmessig å gi bevis for den følgende sats:

Teorem 10.3 (a) Anta α er en vilkårlig formel i L og anta m,m'ê|E3|. Da gjelder:
Lαêπ;1(m) & mμm' & π;2(m')≠ø. → Lαêπ;1(m')
(b) Anta mê|S3.5| og m'ê|E3|. Da har man:
π;2(m')≠ø → mμm' → m'μm
(c) Anta α er en vilkårlig formel i L og anta m,m'ê|E3|. Da gjelder:
mμm' & π;2(m')≠ø & π;2(m)≠ø. → Lαêπ;1(m) ↔ Lαêπ;1(m')

Bevis: *Ad(a)*: Anta forutsetningene i satsen holder og anta:
(1) Lαêπ;1(m) & mμm' & π;2(m')≠ø
Fra den andre konjunkten i (1) følger sammen med definisjonen av μ at
(2) π;2(m)≠ø & π;2(m) Inkl π;1(m'). Fra den tredje konjunkten i (1) følger at det finnes en formel γ slik at (3) γêπ;2(m'). Nå har vi siden m er en E3-modell og π;2(m)≠ø at π;2(m) er lukket under E3-konsekvens. Dette innebærer at alle E3-teoremer er med i π;2(m). Spesielt innebærer dette at (α→(γ→α))êπ;2(m). I sin tur impliserer dette at (4) L(α→(γ→α))êπ;1(m). Siden L(α→(γ→α))→Lα → L(γ→α) er et akiom i E3 følger ved hjelp av (1) og (4) at L(γ→α)êπ;1(m). Siden videre L(γ→α) → L(Lγ →Lα) er et aksiom i E3, og derfor med i π;1(m), følger (5) L(Lγ→Lα)êπ;1(m). Herav følger (Lγ→Lα)êπ;2(m). Fra dette følger i sin tur at (6) (Lγ→Lα)êπ;1(m'). Fra (3) følger Lγêπ;1(m'). Dette og (6) impliserer så det vi ønsker, nemlig: Lαêπ;1(m').

Ad (b): Anta (1) mê|S3.5| & m'ê|E3| Anta videre (2) π;2(m')≠ø og (3) mμm'. Fra (3) og definisjonen av μ følger (4) π;2(m) Inkl π;1(m'). Anta for reduktio ad absurdum at (5) ¬(m'μm). Fra definisjonen av μ følger da π;2(m')≠ø → ¬(π;2(m') Inkl π;1(m)). Fra dette og (2) har vi ¬(π;2(m') Inkl π;1(m)). Herav følger at det finnes en formel α slik at (6) αêπ;2(m') & ¬(αêπ;1(m)). Fra den andre konjunkten i (6) følger (7) (¬α)êπ;1(m). Siden m er en S3.5-modell følger det at (8) (¬α → ¬Lα)êπ;1(m). Videre må vi ha (¬Lα → L¬Lα)êπ;1(m). Dette, (7) og (8) impliserer L¬Lαêπ;1(m). Fra dette følger ¬Lαêπ;2(m). Herav har vi ved hjelp av (4) (¬Lα)êπ;1(m'). Fra den første konjunkten i (6) følger Lαêπ;1(m'). Vi må derfor har ((¬Lα)&Lα)êπ;1(m'), noe som åpenbart er umulig.

Ad (c): Dette følger fra punkt (a) og (b). **QED.**

Vi kan nå ta fatt på den følgende sats som er viktig i vår sammenheng.

Teorem 10.4 Anta S er et av systemene S3.5 eller S9. La Γ(m) være definert som ovenfor. Anta mê|S|. Definer, om p er en setningsvariabel, funksjonen φ ved å sette:
(i) φ(p) = Mg(m': m'êΓ(m) & pêπ;1(m'))
Definer mengden N ved: (ii) N = Mg(m': m'êΓ(m) & π;2(m')≠ø)
Sett per definisjon:
(iii) M=<φ, Γ(m), N>. Da gjelder følgende:
(a) M er en Kripke S-modell
(b) Er m' et vilkårlig element i Γ(m) og er α en vilkårlig formel i L har man:
<M,m'> ⊨ α ↔ αêπ;1(m')

Bevis: Vi skal først vise at følgende holder:
(+) π;2(m)≠ø → Γ(m) = Mg(m': m'ê|E3| & mμm')
Det er ganske åpenbart at inklusjonen mot høyre venstre holder. Vi har jo umiddelbart fra definisjonen av Γ(m) at mêΓ(m). Anta mμm' for vilkårlig m'. Siden det følger fra definisjonen av Γ at (Ax)(Ay)(xêΓ(m) & xμy → yêΓ(m)) følger det at m'êΓ(m).

Vi må så vise at inklusjonen mot høyre i (+) holder. Vi bemerker at µ er en transitiv relasjon over Γ(m). Dette bevises på nøyaktig den måten vi gjorde i beviset for Teorem 9.4 under Tilfelle (i). Nå er det også lett å vise at

> (++) Er π;2(m)≠ø & m'êΓ(m) så finnes det et naturlig tall n>0 og x;0,...,x;nêΓ(m) slik at x;0=m & x;n=m' & (Aj)(0=<j<n → x;jµx;(j+1))

Dette bevises ved induksjon på Γ(m). Basistrinn: Er m' =m har vi siden π;2(m) ≠ø at π;2(m) Inkl π;1(m) siden m er en E3-modell. Herav kan vi slutte at mµm Det følger at det finnes x;0, x,1 der x;0=m & x;1=m & x;0µx;1. Induksjonstrinn. Anta påstanden holder for m' og at m'µm''. Siden den holder for m' har vi at det finnes x;0,...,x;n slik at x;0 = m & x;n=m' og der (Aj)(0=<j<n → x;jµx;(j+1)). Men siden m'µm'' må det da finnes x;0,.....,x;(n+1) slik at
x;0=m & x;(n+1) = m'' & (Aj)(0=<j<n+1 → x;jµx;(j+1)). Dette viser at (++) holder.

La oss så så bevise inklusjonen mot høyre i (+). Anta π;2(m)≠ø. og for vilkårlig m' at m'êΓ(m). Fra (++) følger da det finnes x;0,...,x;nêΓ(m) slik at x;0=m & x;n=m' & (Aj)(0=<j<n → x;jµx;(j+1)). Siden Γ(m) Inkl |E3| per definisjon har vi m'ê|E3|. Siden µ er transitiv følger videre at mµm'. Dette viser at (+) holder.

Ad (a): Vi skiller mellom to tilfelle alt ettersom S er S3.5 eller S9.

Tilfelle (i): S er S3.5. Slik vi har definert Kripke S3.5-modell er det temmelig opplagt at (a) holder. Vi har etter definisjonen av N i teoremet at N Inkl Γ(m). Det eneste vi må vise er at N≠ø. Men mê1S3.5|. Det innebærer at m er en S3-modell. Fra definisjonen av S3-modell følger at π;1(m)≠ø. Vi har dessuten at mêΓ(m) i lys av definisjonen av Γ(m). Det følger at mêN og derfor at N≠ø. M oppfyller derfor kravene til en Kripke S-modell om S er S3.5.

Tilfelle (ii): S er S9. Da kan vi som i forrige tilfelle godtgjøre at M oppfyller kravene til en Kripke S3.5-modell. Vi må imidlertid nå vise at N er strengt inkludert i Γ(m). Anta for reduktio at absurdum at (1) (Am')(m'êΓ(m) → π;2(m')≠ø). Siden mê|S9| har vi at m er en S3.5 modell og derfor en S3-modell. Det følger at π;2(m)≠ø. og derfor at (2) mµm. Fra det at π;2(m)≠ø og (+) har vi da:
(3) Γ(m) = Mg(m': m'ê|E3| & mµm'). Fra (1) og (3) følger:

(4) (Am')(m'ê|E3| & mµm' → π;2(m')≠ø). Siden (α→α)êπ;2(m) for enhver E3-modell m der π;2(m)≠ø følger fra (3): (Am')(m'ê|E3| & mµm' → (α→α)π;2(m')). Fra dette følger videre (5) (Am')(m'ê|E3| & mµm' → L(α→α)êπ;1(m')). Fra (2), (5) og Teorem 10.2 følger at (6) LL(α→α)êπ;1(m). Men m var en S9-modell. da har vi (¬LLβ)êπ;1(m) for alle formler β. Dette strider åpenbart mot (6). Det følger at (1) ikke holder og at man derfor har: (Em') (m'êΓ(m) & π;2(m')=ø). Herav har vi N SInkl Γ(m). Dette viser at i dette tilfellet der S er S9 har vi at M er en Kripke S9-modell. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (a) i teoremet.

Ad (b): Anta m' et vilkårlig element i Γ(m), og at α er en vilkårlig formel i L. Vi skal vise at da holder: (1) <M,m'> ╞ α ↔ αêπ;1(m'). Dette gjøres ved induksjon på lengden av α.

(i) Er α en setningsvariabel p har vi at

<M,m'> ╞ α ↔ <M,m'> ╞ p ↔ m'êφ(p) ↔ pêπ;1(m')

(ii) Er α = ¬β for en eller annen formel β har vi:

<M,m'> ╞ ¬β ↔ ¬(<M,m'> ╞ β)

↔ ¬(βêπ;1(m')) (Her benytter vi induksjonshypotesen)
↔ (¬β)êπ;1(m') (Siden π;1(m') er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(m')

(iii) Er α=(β→γ) for visse formler β,γ har vi:
<M,m'> ⊨ (β→γ) ↔ (<M,m'> ⊨ β → <M,m'> ⊨ γ)
↔ (βêπ;1(m') → γêπ;1(m')) (Etter induksjonshypotese)
↔ (β→γ)êπ;1(m') (π;1(m') er en sannhetsmengde)
↔ αêπ;1(m')

(iv) Anta α = Lβ for en eller annen formel β :

Tilfelle (i): m'êN Da har vi
(1) <M,m'> ⊨ Lβ ↔ (Am'')(m''êΓ(m) →<M,m''> ⊨ β)
↔ (Am'')(m''êΓ(m) → αêπ;1(m'')) (Induksjonhypotese)

Ved hjelp av (+) ovenfor har vi:
(2) (Am'')(m''êΓ(m) → αêπ;1(m'')) ↔ (Am'')(m''ê|E3| & mμm'' → αêπ;1(m''))

Ved hjelp av Teorem 10.2 har vi, siden mμm at
(3) (Am'')(m''ê|E3| & mμm'' → αêπ;1(m'')) ↔ Lαêπ;1(m).

Nå har vi at m'ê Γ(m) og derfor mμm' ifølge (+). Vi har dessuten dessuten at π;2(m)≠ø, siden m er en S3-modell. Vi har derfor i dette tilfellet ved hjelp av Teorem 10.2c
(4) Lαêπ;1(m) ↔ Lαêπ;1(m') Fra (1) - (4) følger

Det følger at <M,m'> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(m').

Tilfelle (ii): m'êΓ(m)-N. Da har vi π;2(m')=ø. I så fall har vi både ¬(Lαêπ;1(m')) og ikraft av valuasjonsregelen for L i en Kripke S3.5 (S9)-modell at ¬(<M,m'> ⊨ Lα). Også i dette tilfellet har vi derfor: <M,m'> ⊨ Lβ ↔ Lαêπ;1(m'). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for
punkt (b). **QED.**

Teorem 10.5 Anta α er en vilkårlig formel i L. La S være et av systemene S3.5 eller S9. Da har man at dersom α er Kripke S-gyldig hvis og bare hvis α er S-gyldig.

Bevis: (i) Vi tar for oss kondisjonalen mot høyre. Anta α er Kripke S-gyldig. Anta m er en vilkårlig S-modell. Da kan vi ved hjelp av Teorem 10.4 konstruere en Kripke S-modell M=<φ,Γ(m),N> slik at (1) (Am')(m'êΓ(m) → (<M,m'> ⊨ α ↔ αêπ;1(m'))). Nå har vi
(2) mêΓ(m). Siden α er Kripke S-gyldig følger derfor <M,m> ⊨ α. Men fra dette, (1) og (2) følger αêπ;1(m). Siden m var en vilkårlig S-modell følger det at α er S-gyldig.
(ii) I lys av Teorem 10.1 har vi at dersom α er S-gyldig så er α et teorem i S. Men ethvert S-teorem er som vi har bemerket Kripke S-gyldig. Dette viser at kondisjonalen mot venstre også holder. **QED.**

§11 Avslutning.

Vi minner om at F i det følgende står for det såkalte "falsum"-systemet, det vil si det systemet som har alle de setningslogisk gyldige formlene i L som aksiomer pluss alle formler av typen ¬Lα. Den eneste slutningsregelen er modus ponens.

For å bevise visse punkter i et av teoremene nedenfor på en rimelig oversiktlig måte avgrenser vi kalkylen Q på følgende måte.

Definisjon 11.1 (a) Vi setter

$C= K(AxE3) U\ Mg(LL(\alpha\to\alpha): \alpha\text{ê}Fm(L))$
(b) Q er den minste formelmengden som inneholder C og som er lukket under modus ponens.
(c) Vi setter : $D = K(AxE3+)\ U\ Mg(LL(\alpha\to\alpha): \alpha\text{ê}Fm(L))$
(d) S3.5+ er den minste formelmengden som inneholder D og som er lukket under modus ponens.

Man ser at C er den formelmengden vi får når K(AxE3) utvides med alle formler av typen $LL(\alpha\to\alpha)$. Tilsvarende ser man at D er aksiomene i E3 utvidet med $LL(\alpha\to\alpha)$.Et forhold som nå kan bevises er det følgende:

Teorem 11.1 Man har:
(a) Q= S4
(b) S3.5+ = S5

Bevis: *Ad (a)*: (I) Vi viser først at S4 er inkludert i systemet Q. Det er da nødvendig å vise (i) at alle aksiomskjemaene i den vanlige aksiomatiseringen av setningslogisk S4 er utledbare i Q. Dessuten må vi vise (ii) at slutningsreglene i S4, modus ponens og nødvendighetsregelen, det vi si $|-\alpha \to |-L\alpha$ er deriverbare i Q. Vi starter med den første oppgaven. Vi har umiddelbart fra definisjonen av Q at K(AxE3) Inkl Q. Vi har derfor at (1) $L\alpha\to\alpha$ er utledbar i Q. Fra definisjonen av Q ser man også at (2) $L(\alpha\to\beta)\to L(L\alpha\to L\beta)$ er et aksiomskjema i Q. Siden $L(L\alpha\to L\beta) \to (L\alpha\to L\beta)$ er en instans av (1) følger fra dette, siden modus ponens er en regel i Q at (3) $Q|- L(\alpha\to\beta) \to L\alpha\to L\beta$. Vi må også vise at det karakteristiske S4-aksiomskjemaet $L\alpha\to LL\alpha$ er et teorem i Q. Nå har vi at $\alpha\to(\beta\to\alpha)$ er et aksiom i Q siden det er et setningslogisk gyldig skjema. Vi har derfor (4) $(\alpha\to(\beta\to\alpha))\text{ê}K(AxE3)$. Nå har man generelt dersom γ,δ er vilkårlige formler at $\delta\text{ê}K(AxE3) \to (L\gamma\to L\delta)\text{ê}K(AxE3)$. Setter vi $\gamma=(\alpha\to\alpha)$ har vi fra dette at (5) $Q|- L(\alpha\to\alpha) \to L(\alpha\to(\beta\to\alpha)$. Nå er $L(\alpha\to\alpha)$ åpenbart et teorem i Q siden $LL(\alpha\to\alpha)$ er et aksiom i Q. Fra dette og (5) har vi derfor ved hjelp av modus ponens at (6) $Q|- L(\alpha\to(\beta\to\alpha))$. Fra dette og (3) følger (7) $Q |- L\alpha\to L(\beta\to\alpha)$. Nå har vi siden (2) er et aksiom i Q: (8) $Q|- L(\beta\to\alpha) \to L(L\beta\to L\alpha)$. Ved substisjon i dette skjema har vi videre: (9) $Q|- L(L\beta\to L\alpha) \to L(LL\beta\to LL\alpha)$. Fra dette og (8) følger ved hjelp av modus ponens: (10) $Q|- L(\beta\to\alpha) \to L(LL\beta\to LL\alpha)$. Fra (6) kan vi utlede: (11) $Q|- L\alpha\to L(\beta\to\alpha)$ ved hjelp av (3). Fra dette og (10) har vi så: (12) $Q|- L\alpha \to L(LL\beta\to LL\alpha)$. Men siden vi har (13) $Q|-L(LL\beta\to LL\alpha) \to(LL\alpha\to LL\beta)$ fordi $L\alpha\to\alpha$ er et aksiomskjema i Q, følger fra (12) og (13): $Q|- L\alpha\to LL\beta \to LL\alpha$. Herav ved hjelp av setningslogikk: (14) $Q|- LL\beta\to L\alpha \to LL\alpha$
Ved substisjon følger fra dette: $Q|- LL(\alpha\to\alpha)\to L\alpha \to LL\alpha$. Men $LL(\alpha\to\alpha)$ er et aksiom i Q. Det følger derfor at (15) $Q|- L\alpha\to LL\alpha$. Man ser fra (1), (3) og (15) at alle de vanlige aksiomskjemaene i S4 kan utles i Q.

Det gjenstår å vise at regelen (+) $Q|-\alpha \to Q|-L\alpha$ lar seg utlede. Dette vises ved induksjon på Q. Ved hjelp av (3) at $Q|-L\alpha\ \&\ Q|- L(\alpha\to\beta) \to Q|- L\beta$. Dette viser at mengden $Mg(\alpha: Q|- \alpha)$ er lukket under modus ponens. Vi behøver derfor bare å vise at

(++) $(A\alpha)(\alpha\text{ê}C \to Q|-L\alpha)$. Vi viser først (16) $(A\alpha)(\alpha\text{ê}K(AxE3) \to Q|-L\alpha)$.
Er $\alpha\text{ê}AxE3$ har vi $L(\alpha\to\alpha)\to L\alpha\text{ê}K(AxE2)$ Inkl Q. Siden $Q|- L(\alpha\to\alpha)$ følger da ved hjelp av modus ponens at $Q|-L\alpha$. Dette viser at (17) $(A\alpha)(\text{ê}AxE3) \to Q|-L\alpha)$ Har vi $Q|-L\delta$ følger ved setningslogikk $Q|- L\gamma \to L\delta$. Fra dette og (8) og modus ponens følger $Q|- L(L\gamma\to L\delta)$. Fra dette og (17) følger ved induksjon på K(AxE2) at (16) holder.

Vi må også vise at dersom $\beta = LL(\alpha\rightarrow\alpha)$ har vi $Q|- L\beta$. Dette følger umiddelbart fra (15), og det forhold at $LL(\alpha\rightarrow\alpha)$ er et aksiom i Q. Vi har nå vist at slutnigsregelen (+) holder i Q. Siden alle de vanlige S4-aksiomskjemaene kan utledes i Q og Q inneholder modus ponens som slutningsregel har vi at S4 er inkludert i Q.

(II) For å vise at S4 inneholder Q er det nok å vise at C er inkluder i S4, siden modus ponens åpenbart er en regel i S4. Vi må da vise at (18) $(A\gamma)(\gamma\text{ê}K(AxE3) \rightarrow S4|- \gamma)$. Dette vises ved induksjon på K(AxE3). *Basistrinn*: Anta $\alpha\text{ê}AxE3$. Tilfelle (i): γ er en setningslogisk gyldig formel. Da har vi umiddelbart at $S4|- \gamma$. Tilfelle (ii): γ er aksiomskjemaet $L\alpha\rightarrow\alpha$. Også dette er åpenbart et teorem i S4. Tilfelle (iii): γ er aksiomskjemaet $L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Vi har at at $S4|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta$. Derfor har vi ved hjelp av nødvendighetsregelen $S4|- L(L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta)$. Fra dette følger, siden L "distribuerer over →" (19) $S4|- LL(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Ved hjelp av det karakteristiske S4-aksiomet har vi enn mer at $S4|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow LL(\alpha\rightarrow\beta)$. Fra dette og (19) følger: $S4|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Vi har nå vist at AxE3 Inkl S4. *Induksjonstrinn*: Anta $S4|-\delta$ Da har vi $S4|- L\delta$ og derfor $S4|- L\gamma\rightarrow L\delta$.

Vi har dermed vist at (18) holder. Det er åpenbart at $LL(\alpha\rightarrow\alpha)$ er et teorem i S4. Vi har derfor vist at alle aksiomene i C er utledbare i S4.

Ad (b): (I) Siden Q åpenbart er inkludert i S3.5+ følger det at alle S4-aksiomene er inkludert i S3.5+. Videre kan man at det typiske S5-aksiomet åpenbart er inkludert i S3.5+. Videre kan man vise, som under (a) at $S3.5+|-\alpha \rightarrow S3.5+|- L\alpha$. Det følger at S5 er inkludert i S3.5+.

(II) For å vise at S5 inneholder S3.5+ er det nok å vise at D er inkluder i S4, siden modus ponens åpenbart er en regel i S5. Vi må da vise at (1) $(A\gamma)(\gamma\text{ê}K(AxE3+) \rightarrow S5|- \gamma)$. Dette vises ved induksjon på K(AxE3+). *Basistrinn*: Anta $\alpha\text{ê}AxE3+$. Tilfelle (i): γ er en setningslogisk gyldig formel. Da har vi umiddelbart at $S5|- \gamma$. Tilfelle (ii): γ er aksiomskjemaet $L\alpha\rightarrow\alpha$. Også dette er åpenbart et teorem i S5. Tilfelle (iii): γ er aksiomskjemaet $L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Vi har at at $S5|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta$. Derfor har vi ved hjelp av nødvendighetsregelen $S5|- L(L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L\alpha\rightarrow L\beta)$. Fra dette følger, siden L "distribuerer over →" (2) $S5|- LL(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Ved hjelp av det karakteristiske S4-aksiomet har vi enn mer at $S5|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow LL(\alpha\rightarrow\beta)$. Fra dette og (2) følger: $S5|- L(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow L(L\alpha\rightarrow L\beta)$. Tilfelle (iv): γ er aksiomskjemaet $\neg L\alpha \rightarrow L\neg L\alpha$. Da har vi umiddelbart at γ er et teorem i S5. Vi har nå vist at AxE3+ Inkl S5. *Induksjonstrinn*: Anta $S5|-\delta$ Da har vi $S5|- L\delta$ og derfor $S5|- L\gamma\rightarrow L\delta$. Vi har dermed vist at (18) holder. Det er åpenbart at $LL(\alpha\rightarrow\alpha)$ er et teorem i S5. Vi har derfor vist at alle aksiomene i D er utledbare i S4. **QED.**

Definisjon 11.2 (a) Med en Q-modell forstås en S3-modell $M = \langle\Delta,R\rangle$ som oppfyller det følgende krav: $(E\alpha)(\alpha\text{ê}Fm(L)\ \&\ L\alpha\text{ê}R)$

(b) Med en S3.5+ modell forstås en S3.5-modell som oppfyller kravet:

$(E\alpha)(\alpha\text{ê}Fm(L)\ \&\ L\alpha\text{ê}R)$

Vi gir nå bevis for fullstendighets- og gyldighets-teoremene for systemene S3.5+ of Q:

Teorem 11.2 (a) Er Γ en Q (S3.5+)-konsistent formelmengde finnes en Q (S3.5+)-modell $M=\langle\Delta,R\rangle$ der Γ Inkl Δ.

(c) Man har at $Q|-\alpha \leftrightarrow (AM)(M\text{ê}|Q| \rightarrow \alpha\text{ê}\pi;1(M))$

(d) Man har at $S3.5+|-\alpha \leftrightarrow (AM)(M\text{ê}|S3.5+| \rightarrow \alpha\text{ê}\pi;1(M))$

Bevis: Anta S enten er Q eller S3.5+. Anta at Γ er en S-konsistent mengde. Ved hjelp av

Lindenbaums lemma, Teorem 4.1, kan Γ utvides til en maksimalt S-konsistent mengde Δ slik at (1) Γ Inkl Δ. Denne mengden Γ vil, i lys av Teorem 4.2, ha alle de egenskapene som en sannhetsmengde har. Vi definerer nå R ved å sette (2) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΔ). Videre definerer vi M ved å sette per definisjon: (3) M=<Δ,R>. Vi har da at umiddelbart ved hjelp av (2) at (4) (Aα)(αêFm(L) → (αêR ↔ LαêΔ)). Fra (2) - (4) og det faktum at Δ er en sannhetsmengde fremgår det at M er en halvsyntaktisk modell. Det som nå må gjøres er å vise at M er en S-modell. Vi bemerker først at alle våre systemer inneholder som teoremer formlene Lα→α og L(α→β)→ Lα→Lβ. I lys av Teorem 4.2 innebærer dette at

(5) (Lα→α)êΔ og
(6) (L(α→β)→(Lα→Lβ))êΔ.

Fra det at Δ er en sannhetsmengde, samt (2), utleder man lett fra dette at

(7.1) R Inkl Δ og
(7.2) αêR & (α→β)êR → βêR

Vi skal nå vise at modellen ovenfor kan vises å ha de egenskaper som kreves av en S-modell. *Tilfelle (i)*: S er systemet Q. For å vise at S er en Q-modell må man da vise:

(8.1) K(AxE3) Inkl R
(8.2) (Eα)(αêFm(L) & LαêR)

Vi tar først for oss (8.1). Anta αêK(AxE3). Nå har vi at alle teoremer i Q er inkludert i Δ, siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Dette innbærer at K(AxE3) Inkl Δ. Siden R åpenbart er ikke-tom finnes det γêR. Siden αêK(AxE3) har vi (Lγ→Lα)êK(AxE3) og derfor (Lγ→Lα)êΔ. Siden γêR følger LγêΔ og derfor LαêΔ. herav αêR. Vi har derfor K(AxE3) Inkl R. Siden LL(α→α) er et aksiom i Q følger at L(α→α)êR og derfor at (8.2) holder.
Tilfelle (ii): S er systemet S3.5+. For å vise at S er en S3.5+-modell må man da vise:

(9.1) K(AxE3+) Inkl R
(9.2) (Eα)(αêFm(L) & LαêR)
(9.3) (Aα)(αêFm(L) → (¬Lα)êΔ → (¬Lα)êR)

Vi tar først for oss (9.1). Anta αêK(AxE3+). Nå har vi at alle teoremer i S3.5+ er inkludert i Δ, siden Δ er en maksimalt konsistent mengde. Dette innbærer at K(AxE3+) Inkl Δ. Siden R åpenbart er ikke-tom finnes det γêR. Siden αêK(AxE3+) har vi (Lγ→Lα)êK(AxE3+) og derfor (Lγ→Lα)êΔ. Siden γêR følger LγêΔ og derfor LαêΔ. herav αêR. Vi har derfor K(AxE3+) Inkl R. Siden LL(α→α) er et aksiom i S3.5+ følger at L(α→α)êR og derfor at (8.2) holder.
Siden alle teoremer i S3.5+ er inkludert i Δ har vi at (¬Lα→L¬Lα)êΔ. Fra dette og (4) kan man så lett utlede (9.3).

Dette avslutter vårt bevis for punkt (a).

Ad (b): Fullstendighetsdelen av (b) følger umiddelbart fra (a). Anta Q|-α La M=<Δ,R> er en Q-modell. Da har vi at M oppfyller følgende krav:

(1) R Inkl Δ og
(2) αêR & (α→β)êR → βêR
(3) K(AxE3) Inkl R
(4) (Eα)(αêFm(L) & LαêR)

Fra (1) og (3) følger at (5) K(AxE3) Inkl Δ. Fra (2) - (4) følger at L(α→α)êR. Derfor har vi LL(α→α)êΔ. Siden Δ er lukket under modus ponens følger det at alle teoremene i Q er med i Δ. Vi må derfor ha αêπ;1(M).Sien M var en vilkårlig modell følger det at α er Q -gyldig.
Ad (c): Fullstendighetsdelen av (c) følger umiddelbart fra (a). Anta S3.5+|-α La M=<Δ,R> er en S3.5+-modell. Da har vi at M oppfyller følgende krav:

(1) R Inkl Δ og
(2) αêR & (α→β)êR → βêR

(3) K(AxE3+) Inkl R
(4) (Eα)(αêFm(L) & LαêR)
(5) (Aα)(αêFm(L) → (¬Lα)êΔ → (¬Lα)êR)

Fra (1) og (3) følger at (6) K(AxE3) Inkl Δ. Fra (2) - (4) følger at L(α→α)êR. Derfor har vi LL(α→α)êΔ. Fra (5) følger at (¬L→L¬Lα)êΔ. Siden Δ er lukket under modus ponens følger det at alle teoremene i S3.5+ er med i Δ. Vi må derfor ha αêπ;1(M). Siden M var en vilkårlig modell følger det at α er S3.5+-gyldig. **QED.**

Før vi går videre nevner vi at systemet S+(n) er systemet S(n) utvidet med L(α→α). En S+(n)-modell er en S(n)-modell M=<Δ,R> der R≠ø. Tilsvarende er systemet Π+(n) systemet Π(n) utvidet med aksiomskjemaet L(α→α). En Π+(n)-modell er en Π(n)-modell M=<Δ,R> der R≠ø. et er meget lett å vise at S+(n) (Π+(n)) er komplett med hensyn på klassen av alle S+(n) (Π+(n))-modeller.

Vi kommer nå til vårt egentlige anliggende. Hensikten er å vise den følgende sats som sier at en rekke av våre systemer er slik at de er snittet av to sterkere systemer. For eksempel skal vi vise at S3.5 er snittet av S5 og S9. Noe som kan virke en smule overraskende. Satsen er denne:

Teorem 11.3[4] Vi har at de følgende påstander holder:
(a) E2 = S2 Ω F
(b) E3 = S3 Ω F
(c) S2 = S2(2) Ω S6
(d) S3 = S4 Ω S7
(e) S3.5 = S5ΩS9
(f) (An)(nêN → S(n) = S+(n) Ω F)
(g) (An)(nêN → Π(n) = Π+(n) Ω F)

Bevis: *Ad (a)*: Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i E2 er det åpenbart at det kan utledes i S3 og i falsumsystemet. Anta på den annen side at αêS2 og αêF. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|S2| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig E2-modell. Da er enten R=ø. i så fall er Mê|F| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er R≠ø. M er da en S2-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |E2|. Det følger at
(AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for E2 følger da E2 |-α. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i E3 er det åpenbart at det kan utledes i S3 og i falsumsystemet. Anta på den annen side at αêS3 og αêF. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|S3| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig E3-modell. Da er enten R=ø, i så fall er Mê|F| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er R≠ø. M er da en S3-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |E3|. Det følger at
(AM)(Mê|E3| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for E3 følger da E3 |-α.

---

[4] De enkelte påstander i Teorem 11.3 er selvfølgelig ikke denne forfatterens oppdagelser. man finner alle disse snittpåstandene formulert og bevist i Kripke [2]. Poenget er at vi her leverer et bevis som er basert bruk halvsyntaktiske modeller og ikke Kripke-modeller.

Dette viser at (b) holder.

Ad (c): Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i S2 er det åpenbart at det kan utledes i S2(2) og i S6. Anta på den annen side at αêS2(2) og αêS6. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|S2(2)| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|S6| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig E2-modell. Da har vi enten (Aα)(αêR → ¬(Lα)êR) , i så fall er Mê|S6| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er ¬(Aα)(αêR → ¬(Lα)êR). Da har vi (Eα)(αêFm(L) & LαêR). M er da en S2(2)-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |S2|. Det følger at (AM)(Mê|E2| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for S2 følger da S2 |-α. Dette viser at (c) holder.

Ad (d): Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i S3 er det åpenbart S3 er inkludert i Q, men Q er jo S4 Videre er et klart at α kan utledes i S7. Anta på den annen side at αêS4 =Q og αêS7. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|Q| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|S7| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig S3-modell. Da har vi enten (Aα)(αêR → ¬(Lα)êR) , i så fall er Mê|S7| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er ¬(Aα)(αêR → ¬(Lα)êR). Da har vi (Eα)(αêFm(L) & LαêR). M er da en Q-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |S3|. Det følger at (AM)(Mê|S3| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for S3 følger da S3 |-α. Dette viser at (d) holder.

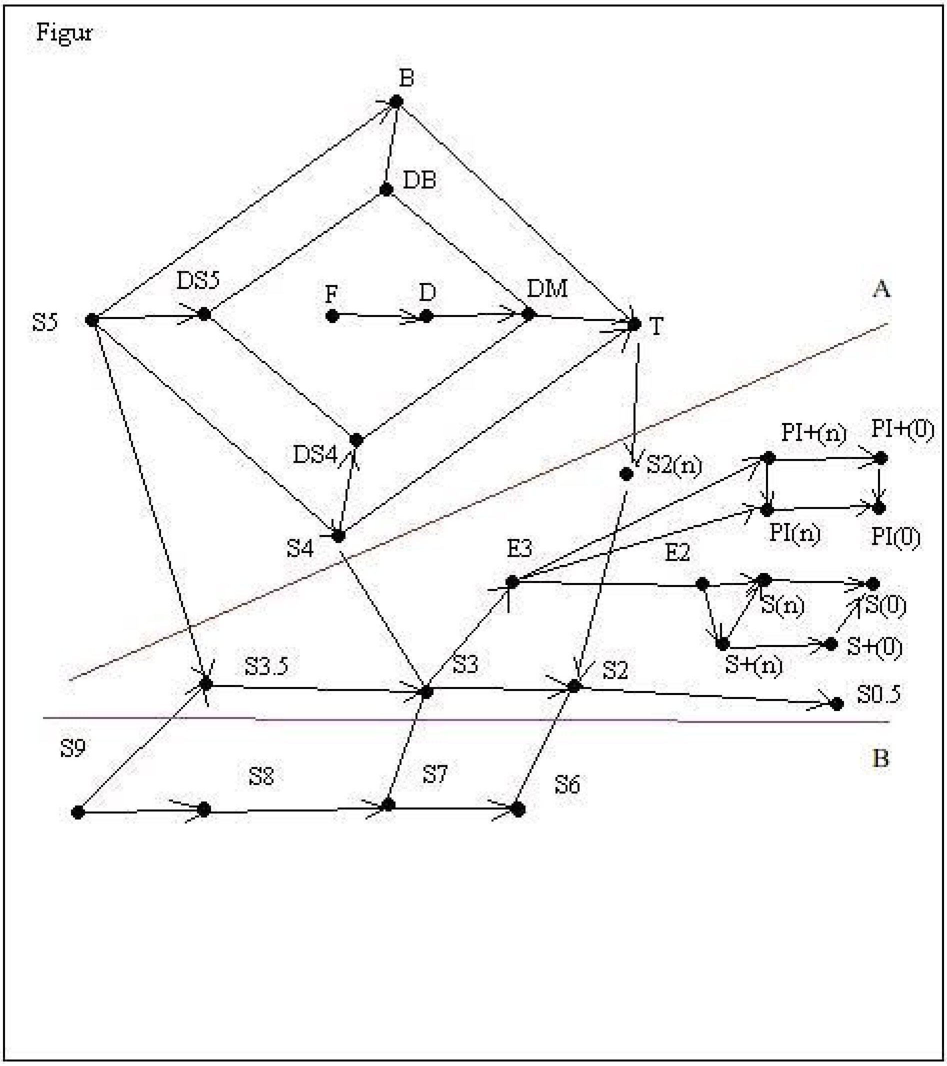
Ad (e): Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i S3.5 er det åpenbart S3 er inkludert i S3.5+ , men S3.6+ er jo S5. Videre er et klart at α kan utledes i S9. Anta på den annen side at αêS3.5+ = S5 og αêS9. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|S3.5+| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|S9| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig S3.5-modell. Da har vi enten (Aα)(αêR → ¬(Lα)êR) , i så fall er Mê|S9| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er ¬(Aα)(αêR → ¬(Lα)êR). Da har vi (Eα)(αêFm(L) & LαêR). M er da en S3.5+-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |S3.5|. Det følger at (AM)(Mê|S3.5| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for S3.5 følger da S3.5 |-α. Dette viser at (e) holder.

Ad (f) og (g): Anta nêN. Inklusjonen mot høyre er opplagt. Er α et teorem i S(n) er det åpenbart er inkludert i S+(n). Videre er et klart at α kan utledes i F. Anta på den annen side at αêS+(n) og αêF. Fra disse to forhold følger (1) (AM)(Mê|S+(n)| → αêπ;1(M)) og (2) (AM)(Mê|F| → αêπ;1(M)). La nå M=<Δ,R> være en vilkårlig S(n)-modell. Da har vi enten R=ø , i så fall er Mê|F| og derfor αêπ;1(M) i henhold til (2). Eller så er R≠ø. M er da en S+(n)-modell og i så fall har vi ved hjelp av (1) at αêπ;1(M). I begge tilfelle har vi αêπ;1(M). Men M var et vilkårlig element i |S(n)|. Det følger at (AM)(Mê|(n)| → αêπ;1(M)). Ved hjelp av fullstendighetsteoremet for S(n) følger da S(n) |-α. Dette viser at (f) holder. Beviset for (g) er fullstendig analogt. **QED.**

Tillegg

Et diagram som viser inklusjonsjonsforholdene mellom de systemene som har blitt undersøkt.

Den følgende figur[5] gir en oversikt over alle de systemene vi har undersøkt her. Dessuten har vi tatt med alle systemene som ble drøftet i Rognes [1] og Rognes [2]. En pil fra et system S til et annet annet S' indikerer at systeemet S inneholder alle teoremene i systemet S'. Det følger at systemet S5 er det mest inklusive av de systemene som har blitt undersøkt. Det er lett å vise at disse inklusjonene holder. Derimot må det medgis at vi ikke i detalj har fremlagt noe bevis for at alle inklusjonene er strenge. Men dette skulle også la seg gjøre.



I forbindelse med systemene bemerker vi at alle systemene over linjen A inneholder slutningsregelen |-α → |-Lα. Systemene under denne linjen inneholder ikke denne slutningsregelen. Alle systemene under linjen B inneholder MMα som et teorem. Systemene over linjen B inneholder ikke denne formelen som et teorem. Systemene over linjen A er uforenelige med MMα. Systemene under linjen B er uforenelige med slutningsregelen |-α →|-Lα.

---

[5] Dette digrammet er i det vesentlige hentet fra Prior [1], side 123. og Hughes &Cresswell [1] side 346.

Referanser

Hughes & Cresswell [1]	Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Moda Logic*, London, Methuen and Co Ltd
Kripke [1]	Kripke, S.A., 1963, "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*", Vol 9, pp. 67 - 96
Kripke [2]	Kripke, S.A., 1965, "Semantical analysis of modal logic II, non-normal modal propositional calculi", *The Theory of Models* (ed. J.W. Addison, L. Henkin, A. Tarski), Amsterdam, North Holland Publishing Co., pp. 206 -220
Prior [1]	Prior, A.N., 1957, *Time and Modality,* Oxford, Clarendon Press
Rognes [1]	Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og normale modale setningslogiske systemer*, Upublisert manuskript.
Rognes [2]	Rognes, M.H., 1971, *Halvsyntaktiske modeller og deontisk logikk,* Upublisert manuskript.